

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**Институт вычислительной математики и информационных технологий**  
**Кафедра системного анализа и информационных технологий**

**Ш.Т. Ишмухаметов, Р.Х. Латыпов,  
Р.Г. Рубцова**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов Института Вычислительной  
Математики и Информационных Технологий

**Казань 2014**

**УДК 511, 519.6**

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГАОУВПО  
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»,  
методической комиссии факультета вычислительной  
математики и кибернетики, протокол № 6 от 11 декабря 2014 г.

*Авторы-составители —*

докт. физ. мат. наук, проф. каф. САИТ КФУ Ш.Т. Ишмухаметов  
докт. техн наук, проф. каф. САИТ КФУ Р.Х. Латыпов  
ст.препод. каф. САИТ Р.Г.Рубцова

Математические основы защиты информации: учебное пособие / Ш.Т. Ишмухаметов, Р.Х. Латыпов, Р.Г.Рубцова.— Казань: Казан. ун. 2014.— 95 с.

Предназначено для студентов старших курсов факультета вычислительной математики и кибернетики.

©Казанский университет, 2014

©Ш.Т. Ишмухаметов, Р.Х. Латыпов, Р.Г.Рубцова 2014

# Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>1 Введение в информационную безопасность.</b>	<b>7</b>
1.1 Основные понятия информационной безопасности . . . . .	7
1.2 Методы информационной безопасности. . . . .	8
1.3 Сервисы информационной безопасности. . . . .	10
1.4 Угрозы информационной безопасности . . . . .	11
1.5 Классификация криптографических методов защиты информации	12
1.6 Особенности систем с открытым ключом . . . . .	13
<b>2 Метод RSA и проблема факторизации</b>	<b>15</b>
2.1 Алгоритм RSA. . . . .	15
2.2 Криптостойкость RSA . . . . .	17
2.3 Метод Ферма . . . . .	18
2.4 $(p - 1)$ -метод Полларда . . . . .	19
2.5 $(p + 1)$ -метод Вильямса . . . . .	25
2.6 $\rho$ -метод Полларда . . . . .	26
2.7 $\rho$ -метод Полларда для вычисления дискретного логарифма . . . . .	28
<b>3 Криптографические методы, основанные на задаче дискретного логарифмирования в конечном поле</b>	<b>31</b>
3.1 Протокол Диффи-Хеллмана . . . . .	32
3.2 Электронная цифровая подпись и ее свойства . . . . .	33
3.3 Односторонние функции. Хеш-функции . . . . .	37
3.4 Алгоритм создания электронной цифровой подписи. . . . .	40
3.5 Алгоритм построения ЭЦП Эль-Гамала . . . . .	42
<b>4 Эллиптические кривые и их приложения в криптографии</b>	<b>45</b>
4.1 Определение эллиптической кривой . . . . .	46
4.2 Эллиптические кривые в проективных координатах . . . . .	50
4.3 Эллиптические кривые в якобиановых проективных координатах	53

4.4	Число точек эллиптической кривой . . . . .	54
4.5	Алгоритм факторизации Ленстры ECF . . . . .	55
4.6	Рекордные разложения метода ECF . . . . .	60
4.7	"Скрученные" кривые и метод Монтгомери . . . . .	61
4.8	Кривые Эдвардса . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Отображения Вейля и Тейта</b>	<b>67</b>
5.1	Криптографические протоколы на эллиптических кривых . . . . .	67
5.2	Вычисление кратного точки ЭК с помощью MOV-алгоритма . . . . .	73
5.3	Дивизоры . . . . .	74
5.4	Определение отображений Вейля и Тейта . . . . .	77
5.5	Алгоритм Миллера . . . . .	80
5.6	"Перемешивающий" эндоморфизм эллиптической кривой . . . . .	83
5.7	Приложения преобразований Вейля и Тейта . . . . .	84
	Список литературы . . . . .	88

## Введение

Криптография - это наука, занимающаяся построением безопасных шифров, т.е. алгоритмов, обеспечивающих преобразование электронных документов в нечитаемый набор символов, из которого можно восстановить исходный документ только зная некоторый пароль (секретное слово). Криптография развивалась с самого начала истории человечества. Известны примеры шифрования текстов из глубокой древности - у римлян, греков и других народов.

Однако эра современной криптографии началась сравнительно недавно, в 70-е годы XX столетия. Приведем здесь основные события тех лет.

В 1977 г. трое ученых Рональд Райвест (Ronald Linn Rivest), Ади Шамир (Adi Shamir) и Леонард Адлеман (Leonard Adleman) из Массачусетского Технологического Института (MIT) опубликовали в журнале *Scientific American* новый алгоритм шифрования, основанный на идее двухключевого шифрования, названный по первым буквам фамилий авторов методом RSA. В этом методе известным параметром служит некоторое целое число  $n$  большой длины (обычно 1024 или 2048 бита), являющееся произведением двух простых чисел  $p$  и  $q$ . Эти числа  $p$  и  $q$  являлись секретными параметрами метода, и для взлома системы RSA было достаточно найти множители  $p$  и  $q$ , т.е. выполнить разложение числа  $n$  на простые сомножители.

На момент опубликования алгоритма RSA было известны лишь небольшое количество алгоритмов факторизации, самым известным из которых являлся метод Ферма. Эти методы позволяли на тот день факторизовать числа, состоящие не более чем из 25 – 30 цифр. Поэтому использование в качестве  $n$  натурального числа, имеющего более 100 десятичных знаков, гарантированно обеспечивало безопасность шифрования этим методом. Сами создатели метода предложили всей математической общественности для тестового взлома 129-значное десятичное число, пообещав за его разложение условное вознаграждение в \$100. Масла в огонь подлила также опубликованная в 1977 г. в журнале *Sci.Amer.* статья известного математика и популяризатора Мартина Гарднера «A new kind of cipher that would take millions of years to break» («Новый алгоритм шифрования, для взлома которого потребуется миллионы лет») [18].

Однако через 17 лет 129-значное число создателей метода RSA было разложено на составные множители с помощью алгоритма квадратичного решета, реализованного в сети коллективом авторов, возглавляемым А.Ленстрой. Эта процедура потребовала колоссальных усилий. Была задействована сеть, состоящая из 1600 компьютеров, которые проработав 220 дней, подготовили систему линейных уравнений, содержащую более 0,5 млн неизвестных. Потом эта система была решена с помощью суперкомпьютера за 2 дня вычислений.

Параллельно с методом RSA американцами У.Диффи и М.Хеллманом в 1976 году был разработан алгоритм, позволяющий вырабатывать общий секретный ключ для двух пользователей сети, общающихся через открытую сеть. Этот метод основывался на трудности задачи вычисления дискретного логарифма в конечных полях.

Схема построения электронной цифровой подписи на электронные документы, обеспечивающей те же условия, что и обычная собственноручная подпись, была разработана в 1984 году египетским криптографом Эль-Гамалем, и была развитием метода Диффи-Хеллмана.

Следующий серьезный этап в развитии криптографии связан с разработкой понятия *эллиптических кривых*. В 1985 В.Миллер и Н.Коблиц показали, что проблема вычисления кратного точки эллиптической кривой, рассматриваемой над конечным полем, имеет большую вычислительную сложность, чем проблема факторизации числа или проблема вычисления дискретного логарифма в полях той же размерности.

В начале 2000-х годов в криптографию вошло и получило большую популярность преобразование Вейля, которое позволило разработать и реализовать много новых алгоритмов типа *короткой* ЭЦП, ЭЦП, основанной на идентификационных данных пользователя, многосторонние протоколы Диффи-Хеллмана и другие.

В данном электронном учебнике мы постарались собрать учебный материал, относящийся к основам построения современных алгоритмов криптографии и соответствующий вспомогательный материал, связанный с этими алгоритмами. В частности, мы приведем сведения из теории групп, колец, конечных полей, теории чисел.

Дополнительные сведения можно получить из монографий А.В.Черемушкина «Лекции по арифметическим функциям в криптографии», МЦНМО, 2002, [85] и О.Н.Василенко «Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии», МЦНМО, 2003, [51] и других источников, упомянутых в списке литературы в конце учебника.

# Глава 1

## Введение в информационную безопасность.

### 1.1 Основные понятия информационной безопасности

*Информационная безопасность* – это состояние информационной системы, в котором угрозы нарушения конфиденциальности, целостности и доступности информации сведены к минимуму.

Разберем основные составляющие, на которые раскладывается задача обеспечения и поддержки информационной безопасности.

*Конфиденциальность* – это свойство информации, обеспечивающее ее адресный доступ к пользователям информационных систем. Иначе говоря, информация должна быть доступна зарегистрированным легальным пользователям, имеющим разрешение владельца на доступ к информационному ресурсу, и недоступна всем остальным несанкционированным пользователям.

*Целостность* – это свойство информации, обеспечивающее ее неизменность или изменение только в соответствии с точными правилами, установленными владельцем информации.

*Доступность* – это это свойство информации, обеспечивающее право легальных пользователей на неограниченный доступ к всем ресурсам информационной системы или их части.

В зависимости от типа информационного ресурса или условий его функционирования на первый план может выступать та или иная составляющая информационной безопасности.

Например, если речь идет о коммерческих разработках, имеющих материаль-

ную ценность вследствие вложенных в них денег, времени и интеллектуальных усилий, то наиболее важным является сохранить их в тайне от конкурентов, т.е. обеспечить конфиденциальность ресурсов. Также конфиденциальными являются данные банковских карт, сведения о личной жизни, состоянии здоровья людей и другие сведения, принадлежащие группам людей.

Другие сведения не представляют собой какой-либо тайны, или, наоборот, должны быть *доступны* всем и доставляться всевозможными способами, например, сведения об опасности, подстерегающих путешественников в той или иной местности, возможных болезнях, негативных последствиях применения наркотиков или медикаментов. Люди, скрывающие такие сведения, являются преступниками и должны быть подвергнуты наказанию.

В третьих случаях необходимо обеспечить защиту информации от незаконного изменения. Таковой является, например, информация о результатах сдачи абитуриентами ЕГЭ по математике или результаты любых других экзаменов. Правила выставления оценок по ЕГЭ строго регламентированы, и изменение допустимо только в ограниченных случаях в строго определенной последовательности. Это свойство информации мы называем целостностью.

Средства информационной безопасности должны обеспечивать защиту всех указанных свойств информации с использованием комплекса методов и средств защиты.

## 1.2 Методы информационной безопасности.

Защита информации обеспечивается различными методами и средствами. В целом, их можно разбить на три большие группы: физические, организационно-правовые и технические средства защиты.

Физические методы защиты образуют внешний уровень защиты. Сюда можно отнести, например, службу охраны учреждения, проверяющей документы на входе в помещение, где содержатся информационные ресурсы (первичная авторизация, разделяющая толпу на людей, имеющих право на доступ к ресурсам, и на граждан, не имеющих таких прав). В эту группу методов защиты также относятся меры защиты от пожаров, скачков напряжения электропитания, наводнений и других техногенных опасностей. Всевозможные датчики, видеокамеры, электронные замки, установленные на охраняемых помещениях, ограничивают перемещение персонала в защищаемых местах и уменьшают вероятность проникновения потенциального нарушителя.

Организационно-правовые методы предназначены для формирования общей политики безопасности учреждения, подбора кадрового состава и включают воспитательные меры защиты, специальные процедуры принятия и увольне-



ния сотрудников (именно обиженные сотрудники представляют особую угрозу для безопасности предприятия в силу знания специфики работы и структуры защиты). Воспитательные меры призваны также воспитывать у сотрудников чувство ответственности за свою работу, работу коллектива и предприятия, в целом, а также информировать служащих о мерах наказания, предусмотренных за те или иные нарушения.

Большую подгруппу в группе организационно-правовых методов образуют законодательные меры и методы защиты, среди них – федеральные законы и указы, региональные, отраслевые законы и постановления, правила внутреннего распорядка и поведения людей в помещениях, содержащих информационные ресурсы и т.п. Кроме знания тех ограничений, которые возникают при работе с защищаемой информацией, необходимо обучать персонал правильной работе, т.к. неправильное обращение с компонентами информационной системы может нанести вред не меньший, чем умышленное повреждение информационного ресурса, которое встречается сравнительно реже.

К техническим методам защиты отнесем программно-аппаратные средства, осуществляющие процедуры аутентификации пользователей, защиту данных от несанкционированного доступа и чтения (криптографические средства), а также средства безопасной передачи данных по сетям, защиту от вирусов и т.п. Отметим, что вышеупомянутые методы защиты принято делить также дополнительно на предупреждающие, выявляющие и восстанавливающие методы защиты.

Первые подобно законам и постановлениям предупреждают взломщика о потенциальных мерах наказания, предусмотренных за те или иные нарушения.

Вторые подобно датчикам и сигнализаторам выявляют наличие нарушений в сфере информационной безопасности и предупреждают владельца информации или службу безопасности о вторжении в защищаемую структуру.

Третьи служат для восстановления ущерба, нанесенного при атаке на информационные ресурсы или службы защиты. Эти три дополнительные три группы можно найти как среди физических, так и среди организационных и технических средств и методов защиты.

Например, при работе с базами данных ограничение доступа персонала к помещению, где находится сервер баз данных, является предупреждающей мерой защиты, аутентификация и аудит пользователей БД – выявляющей мерой, а архивирование данных и восстановление после сбоя восстанавливающей мерой защиты.

Не умаляя значимости физических и организационно-правовых методов защиты, мы основное внимание уделим техническим методам защиты, в группу которых включается и криптография.

### 1.3 Сервисы информационной безопасности.

Сервисы информационной безопасности – это основные комплексы защитных средств, предназначенные для поддержки безопасности системы. К этим сервисам относятся *аутентификация, авторизация и аудит*.

Соответствующие английские написания этих терминов имеют вид: authentication, authorization, audit, и начинаются с букв Au, обозначающих химический элемент "золото" в периодической таблице Менделеева. Поэтому сервисы аутентификации, авторизации и аудита называют *золотыми правилами* информационной безопасности. Дадим краткое определение этих терминов.

#### **Аутентификация.**

*Аутентификация* – это процедура проверки идентификатора пользователя. При входе в информационную систему пользователь должен идентифицировать себя, т.е. отождествить себя с одним из зарегистрированных в системе пользователей. Для этого в самой распространенной системе парольной аутентификации пользователь вводит свои логин и пароль.

Логин является идентификатором пользователя. Наличие пользователя с таким идентификатором проверяется по базе данных зарегистрированных пользователей. Однако, идентификаторы пользователей не являются секретными данными, поэтому кто-угодно может оказаться под предъявляемым логином. Значит, необходимо проверить тождественность идентификатора субъекту, пытающемуся войти в систему. Для этого и служит пароль, который и является тем секретом, который должен знать только сам пользователь и система аутентификации, проверяющая легальность пользователя.

#### **Авторизация.**

*Авторизация* – это процедура разделения пользователей на группы с разными правами доступа.

Зарегистрированный пользователь, входящий в систему, не обязательно получает полные права на доступ к системе. Для того, чтобы точно определить кому какие права на и на какие объекты передать используется авторизация. В результате выполнения этой процедуры некоторые пользователи получают полный доступ к системе, некоторые - только право на чтение, а некоторые - ограниченные права по доступу к специализированному набору сервисов.

Например, представим себе работу деканата учебного заведения по регистрации текущих оценок студентов. Есть разные группы пользователей, получающие доступ к оценкам:

1. Сами студенты и их родители могут читать данные, относящиеся к группе, в которой студент занимается.
2. Преподаватель по предмету может читать и изменять оценки по своему предмету, но только в определенные временные интервалы.
3. Замдекана проверяет оценки, введенные преподавателем, и фиксирует их в окончательной таблице данных, после чего изменение становится невозможным или возможным с разрешения декана факультета.

Авторизация – неперенный атрибут всех систем управления базами данных, в которых эта процедура может тщательно прописана для каждого объекта базы данных: схемы таблицы, данных в таблице, отдельных элементов, запросов (статистики), форм, отчетов, макросов и программных процедур.

### **Аудит.**

Аудит – это процедура записи действий всех пользователей по доступу к защищаемым данным.

Если какой-то пользователь неправомерно использует доступ к системе для расширения своих полномочий или пытается нарушить нормальное функционирование системы путем, например, подбора паролей, выполнения SQL-инъекций или других незаконных действий, то аудит позволит определить виновного и передать данные администратору системы. В большинстве случаев правильно настроенная ИС сама автоматически определит попытки взлома и блокирует нападавшего.

## **1.4 Угрозы информационной безопасности**

Организация надежной защиты не может быть выполнена без анализа *угроз* ИБ и степени их опасности. Под угрозой понимается потенциально возможное событие, которое может привести к нанесению вреда информационной системе и хранящейся в ней информации.

Существует различные классификации угроз. Приведем здесь некоторые из таких классификаций (см. Шаньгин Ф.Ф. Защита компьютерной информации: эффективные методы и средства [86]):

1. По природе возникновения угрозы делятся на

- естественные угрозы, вызванные естественными физическими процессами или природными явлениями (наводнениями, землетрясениями, сбоями электропитания и т.п.);

- искусственными угрозами, вызванными деятельностью человека (некомпетентные действия персонала, действия хакеров, злоумышленные действия конкурентов и т.п.);

2. По степени преднамеренности угрозы различаются как

- угрозы, вызванные ошибками или халатностью персонала, например, неправильное использование информационной системой;
- угрозы преднамеренного действия, например, действия злоумышленников.

3. По местоположению угрозы могут быть:

- вне зоны расположения ИС;
- в пределах контролируемой зоны ИС;
- непосредственно в ИС, например, зараженные вирусами программные средства.

4. По степени вреда, наносимого информационной системе:

- незначительное, легко восстанавливаемое нарушение работы ИС;
- существенное нарушение работы ИС, требующие серьезных мер по восстановлению нормальной работы;
- критическое воздействие на работу ИС, вызвавшее полное крушение системы, или важных компонент ее работы, потеря жизненно важной информации, хранящейся в системе, блокирование каналов связи, требующее длительного времени восстановления и другие угрозы, наносящие существенный вред информационной системе.

## 1.5 Классификация криптографических методов защиты информации

Криптографические методы защиты информации входят в систему технических методов защиты. Эти методы делятся на следующие группы:

1. Методы шифрования информации, предназначенные для защиты информации от чтения, с помощью криптографического преобразования, превращающего исходный текст в нечитаемую последовательность символов;

2. Методы построения электронной цифровой подписи (ЭЦП), предназначенные для защиты информации от изменения, связывания источника информации (автора) с самой информацией;
3. Методы хеширования данных, предназначенные для проверки целостности электронных документов без чтения самой информации в этих документах;

Классические методы шифрования и построения ЭЦП включают в себя сдвиги и перестановки исходного текста, гаммирование (наложение одного текста на другой), подстановки (отображения одних алфавитов на другие) или комбинации этих методов. Например, такой классический шифр как DES (Data Encryption Standard), разработанный фирмой IBM и утвержденный правительством США в 1977 году как официальный стандарт, имеет блоки по 64 бита и использует ключ длины 56 бит. Алгоритм использует комбинацию нелинейных (S-блоки) и линейных (перестановки E, IP, IP-1) преобразований.

В нашем учебнике мы рассмотрим неклассические системы, которые появились примерно в середине 70-х годов XX столетия.

## 1.6 Особенности систем с открытым ключом

*Шифрование* – это процедура преобразования произвольного электронного файла (текстовой строки) в нечитаемую последовательность символов для защиты файла от чтения людьми, не имеющими соответствующих прав доступа. *Ключом шифрования* (построения электронной цифровой подписи ЭЦП) называется произвольный конечный набор символов некоторого алфавита, который служит входным параметром для алгоритма шифрования (построения ЭЦП). Классические системы шифрования такие, как шифры перестановки, подстановки (например, DES и RC4) используют один и тот же ключ как для шифрования, так и для расшифрования текстов.

Система RSA относится к *системам шифрования с открытым ключом*. Это означает, что для шифрования и расшифрования используются совершенно разные ключи. Ключ шифрования, используемый для преобразования исходного текста в шифротекст, разрешается передавать любому пользователю системы, не задумываясь о безопасности, поэтому этот ключ называется *открытым* – *public* в отличие от второго *секретного*–*private* ключа, который используется для восстановления исходного текста. Это позволяет свободно передавать и обменивать ключи по различным сетям с открытым доступом.



## Глава 2

# Метод RSA и проблема факторизации

### 2.1 Алгоритм RSA.

В этой части рассмотрим один из наиболее популярных алгоритмов двухключевой криптографии – метод RSA. Его работы состоит из трех частей:

#### I. Генерация ключей.

1. Выбираем два произвольных простых числа  $p$  и  $q$ .
2. Вычисляем их произведение  $n = p \cdot q$  и функцию Эйлера

$$\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

3. Выбираем случайное число  $e$ ,  $2 \leq e < n$ , взаимно-простое с  $e$ . Последнее означает, что Н.О.Д( $n$ ,  $e$ )=1. Объявляем число  $e$  открытым ключом RSA.
4. Вычисляем элемент  $d$ ,  $1 < d < n$ , обратный к  $e$  по модулю  $\varphi(n)$ . Иначе говоря,  $d$  должен удовлетворять условию

$$e \cdot d \bmod \varphi(n) = 1$$

Для вычисления  $d$  необходимо использовать обобщенный алгоритм Евклида (см. раздел "Обобщенный алгоритм Евклида").

Объявляем число  $d$  закрытым ключом RSA.

#### II. Шифрование.

Для шифрования текстовой строки  $M$  выполним следующие действия:

1. Разобьем текст на отдельные символы.
2. Заменяем последовательность символов последовательностью их кодов (например, в стандартной кодировке Win 1251).
3. Зашифруем последовательность, заменяя каждый код  $c$  на шифрокод по формуле:

$$h = enc(c) = c^e \bmod n \quad (2.1.1)$$

### III. Расшифрование.

Для расшифрования шифростроки  $enc(M)$  выполним следующие действия:

1. Расшифруем последовательность, заменяя каждый шифрокод  $h$  на код  $c = dec(h)$ , вычисляемый по формуле:

$$c = h^d \bmod n \quad (2.1.2)$$

2. Заменяем коды  $c$  на символы текста, восстанавливая сообщение.

Корректность операции восстановления исходных символов текста обеспечивается следующей теоремой Эйлера, являющейся обобщением *малой теоремы Ферма*:

**Теорема Эйлера.** Для любого элемента  $a > 0$  кольца вычетов  $\mathbf{Z}_n$  по модулю  $n$  выполняется следующая формула:

$$a^{\varphi(n)} \bmod n = 1$$

Поскольку из условия  $e \cdot d \bmod \varphi(n) = 1$  следует, что  $e \cdot d = k \cdot \varphi(n) + 1$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ , то вычисление (2.1.2) даем нам

$$h^d = (c^e)^d = c^{ed} = c^{k \cdot \varphi(n) + 1} = c \cdot (c^{\varphi(n)})^k = c \cdot 1^k = c,$$

откуда вытекает справедливость формулы (2.1.2).



**Пример.** Пусть  $p = 11$ ,  $q = 5$ .

1. Вычислим  $n = p \cdot q = 55$  и функцию Эйлера  $\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1) = 10 \cdot 4 = 40$ .

2. Возьмем открытый ключ, равным  $e = 7$ . Проверим условие

$$\text{Н.О.Д.}(\varphi(n), e) = \text{Н.О.Д.}(40, 7) = 1$$

3. Найдем  $d$  из условия  $7 \cdot d \bmod 40 = 1$ . Вычисление  $d$  выполнено в примере 2 следующего параграфа. Получим  $d = 23$ .

Параметры RSA определены.

4. Зашифруем число  $m = 15$ :

$$h = \text{enc}(15) = m^e \bmod n = 15^7 \bmod 55 = 5$$

5. Расшифруем шифрокод

$$c = h^d \bmod n = 5^{23} \bmod 55 = 15$$

## 2.2 Криптостойкость RSA

*Факторизацией целого числа* называется его разложение в произведение простых сомножителей. Такое разложение, согласно основной теореме арифметики, всегда существует и является единственным (с точностью до порядка следования множителей). Известно, что задача факторизации является вычислительно сложной задачей. Однако никому пока не удалось получить высоких нижних оценок этого алгоритма. Известно, что эта задача не является также NP-полной.

Криптостойкость RSA базируется на предположении, что не существует быстрых (полиномиальных) алгоритмов факторизации. В силу отсутствия высоких нижних оценок криптостойкость RSA – только гипотеза, подобно *тезису Черча*. Поэтому вопрос о существовании алгоритма факторизации с полиномиальной сложностью на классическом компьютере для выполнения факторизации является одной из важных открытых проблем современной теории чисел. В то же время факторизация с полиномиальной сложностью возможна на квантовом компьютере с помощью алгоритма Шора.

Все методы факторизации в зависимости от их производительности можно разбить на две группы: экспоненциальные методы и субэкспоненциальные методы.

Все эти методы достаточно трудоемки, поэтому требуют значительных вычислительных ресурсов для чисел большой длины. В этой главе мы дадим описание наиболее известных алгоритмов факторизации, имеющих экспоненциальную оценку сходимости.

Среди субэкспоненциальных алгоритмов следует выделить метод *эллиптических кривых* Ленстры, являющийся аналогом  $p - 1$ -метода Полларда, метод *квадратичного решета* Карла Померанса и *метод решета числового поля*. Описание первого из них будет дано в главе "Эллиптические кривые и их использование в криптографии".

## 2.3 Метод Ферма

Пусть  $n = p \cdot q$  – нечетное целое число, являющееся произведением двух неизвестных простых чисел  $p$  и  $q$ , которые требуется найти. Большинство современных методов факторизации основано на идее, предложенной еще Пьером Ферма, заключающейся в поиске пар натуральных чисел  $A$  и  $B$  таких, что выполняется соотношение:

$$n = A^2 - B^2. \quad (2.3.3)$$

Алгоритм Ферма может быть описан следующим образом:

1. Вычислим целую часть от квадратного корня из  $n$ :

$$x_0 = \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

2. Для  $x_i = x_0 + i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  будем вычислять значения

$$q(x_i) = x_i^2 - n, \quad (2.3.4)$$

до тех пор, пока очередное значение  $q(x_i)$  не окажется равным полному квадрату.

3. Пусть  $q(x_i)$  является полным квадратом, например, числа  $B$ :  $q(x_i) = B^2$ . Определим  $A = x_i$ , откуда из равенства  $A^2 - n = B^2$  найдем  $n = A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ , и искомые делители  $p$  и  $q$  вычисляются, как  $p = A + B$ ,  $q = A - B$ .

**Пример.** Пусть факторизируемое число  $n = 19\,691$ . Вычислим  $m = \lceil \sqrt{n} \rceil = 141$ . Представим процедуру вычисления делителей  $n$  в виде таблицы:

x	q(x)	$\sqrt{q(x)}$
141	190	13,78
142	473	21,75
143	758	27,53
144	1045	32,33
145	1334	36,52
146	1625	40,31
147	1918	43,79
148	2213	47,04
149	2510	50,10
150	2809	53

Из последнего столбца получим:  $(140 + 10)^2 - n = 53^2$ , откуда  $n = 150^2 - 53^2 = 203 \cdot 97$ . Итак,  $19691 = 203 \cdot 97$ , и вычисление потребовало 10 итераций, в каждой из которых было выполнено 1 возведение в степень, 1 вычитание и одно вычисление квадратного корня, т.е. константное число операций.

### Оценка производительности метода Ферма

В наихудшем случае, когда  $q$  близко к 1, а  $p$  близко к  $n$ , алгоритм будет работать даже хуже, чем метод пробных делений. Действительно,  $A = (p+q)/2$ , откуда число итераций в методе Ферма равно

$$Iter(n) = \frac{p+q}{2} - \lfloor n^{1/2} \rfloor \approx \frac{n}{2} - \lfloor n^{1/2} \rfloor,$$

т.е. имеет порядок  $O(n)$ . Для того, чтобы метод Ферма работал не хуже, чем метод пробных делений необходимо, чтобы  $Iter(n)$  было меньше  $n^{1/2}$ , откуда больший делитель  $p < 4n^{1/2}$ .

Таким образом, как и метод пробного деления, алгоритм Ферма имеет экспоненциальную оценку и не эффективен для разложения длинных чисел.

Можно улучшить метод Ферма, выполнив сначала пробное деление числа  $n$  на числа от 2 до некоторой константы  $B$ , исключив тем самым малые делители  $n$  до  $B$  включительно, и только потом выполнить поиск методом Ферма.

## 2.4 $(p-1)$ -метод Полларда

Этот метод был разработан английским математиком Джоном Поллардом в 1974 г. и опубликован в [33].

Пусть  $n$ —факторизуемое число, а  $1 < p < n$ —его простой делитель. Согласно малой теореме Ферма, для любого  $a$ ,  $1 \leq a < p$ , выполняется условие  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Это же сравнение выполнится, если вместо степени  $p-1$  взять произвольное натуральное число  $M$  кратное  $p-1$ , т.к. если  $M = (p-1) \cdot k$ , то  $a^M = (a^{p-1})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{p}$ . Последнее условие эквивалентно  $a^M - 1 = pr$  для некоторого целого  $r$ . Отсюда, если  $p$  является делителем числа  $n$ , тогда  $p$  является делителем наибольшего общего делителя Н.О.Д.  $(n, a^M - 1)$  и совпадет с Н.О.Д.  $(n, a^M - 1)$ , если  $a^M - 1 < n$ . Пусть

$$p-1 = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_t^{r_t}. \quad (2.4.5)$$

Идея  $(p-1)$ -метод Полларда состоит в чтобы выбрать  $M$  в виде произведения как можно большего числа простых сомножителей или их степеней так, чтобы  $M$  делилось на каждый сомножитель  $p_i^{r_i}$ , входящий в разложение (2.4.5). Тогда, Н.О.Д.  $(n, a^M - 1)$  даст искомый делитель. Алгоритм состоит из двух стадий:

### Первая стадия (p-1)-алгоритма Полларда

1. Сначала выберем границу  $B_1$ .
2. Определим множество  $P$ , состоящее из простых чисел и их степеней, меньших границы  $B_1$ :

$$P = \{p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \dots, p_k^{r_k}\}, \quad p_i^{r_i} < B_1.$$

3. Вычислим произведение

$$M = M(B_1) = \prod_{p_i^{r_i} \in P} p_i^{r_i}$$

4. Выберем произвольное число  $a$ , например 2, и вычислим  $a^M \bmod n$ .
5. Вычислим Н.О.Д.  $(n, a^M - 1)$ , который, если повезет даст искомый делитель числа  $n$ .

**Пример.** Факторизовать  $n = 10\,001$ . Выберем  $B = 10$ , тогда,  $M(B_1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ . Вычислим,  $2^{2520} \bmod 10\,001 = 3579$ . Найдем, Н.О.Д.  $(n, a^M - 1) = \text{Н.О.Д.}(10\,001, 3578) = 73$ .

Заметим, что при большом значении  $B_1$  число  $M(B_1)$  может оказаться чрезвычайно большим (оно сравнимо с  $B_1!$ ). В таких случаях лучше разбить полное произведение  $M(B_1)$  на  $l$  блоков, состоящих из примерно одинакового числа сомножителей, и вычислив числа  $M_i$  как произведение элементов блока  $i$ ,

представить  $M(B)$  в виде  $M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_l$ . Затем, можно вычислить  $a^{M(B)}$  как предел последовательности  $\{a_i\}$ , где  $a_1 = a^{M_1} \pmod{n}$ , а последующие  $a_i$  вычисляются по формуле:

$$a_{i+1} = a_i^{M_{i+1}} \pmod{n}, \quad i < l.$$

В этом случае, все вычисления будут выполняться с числами, сравнимыми по модулю с числом  $n$ .

### Вторая стадия (p-1)–алгоритма Полларда

Если в результате первого этапа алгоритм не выдает требуемого делителя, то можно либо увеличить границу  $B_1$ , либо начать вторую стадию работы алгоритма.

Вторая стадия алгоритма предполагает, что существует только один простой множитель  $q$  числа  $p-1$ , значение которого больше границы  $B_1$ . Выберем новую границу  $B_2 \gg B_1$ , например,  $B_2 = B_1^2$ . Обозначим через  $b$  число  $a^{M(B)} \pmod{n}$ , вычисленное на первой стадии работы алгоритма.

Выпишем последовательность  $q_0 < q_1 < \dots < q_s$  всех простых чисел на интервале  $[B; B_2]$ . Для построения этого множества можно воспользоваться решетом Эратосфена, либо решетом Аткина (см.гл.1).

Поскольку наличие в последовательности  $\{q_i\}$  нескольких составных чисел не испортит работы алгоритма, можно выполнить только частичное просеивание, отсеяв числа, кратные небольшим простым числам. Это ускорит общую работу алгоритма.

Если искомый множитель  $p-1$  равен  $q_i$ , то для нахождения делителя  $n$ , необходимо вычислить  $c_i = b^{q_i} \pmod{n}$ , и найти Н.О.Д.  $(n, c_i - 1)$ . Поскольку, значение  $q$  неизвестно, мы должны выполнить последние две операции с каждым числом  $q_i$  из интервала  $[B_1; B_2]$ . Поллард предложил следующий вариант организации этой процедуры. Обозначим через  $\delta_i$  разность между соседними простыми числами  $\delta_i = q_{i+1} - q_i$ . Возможные значения, принимаемые  $d_i$ , лежат в небольшом множестве  $D = \{2, 4, \dots, 2t\}$ . Можно заранее вычислить все значения  $b^\delta \pmod{n}$  для  $\delta \in D$  и сохранить полученные числа в массиве. Вторая стадия алгоритма выполняется следующим образом:

1. Вычислим сначала  $c_0 = b^{q_0} \pmod{n}$ , и найдем  $d = \text{Н.О.Д.}(n, c_0 - 1)$ .
2. Если  $d = 1$ , то вычислим следующее  $c_1 = b^{q_1} \pmod{n}$  и  $d = \text{Н.О.Д.}(n, c_1 - 1)$  и т.д.
3. Каждое последующее значение  $c_{i+1}$  вычисляется по формуле

$$b^{q_{i+1}} \pmod{n} = b^{q_i + \delta_i} \pmod{n} = b^{q_i} \cdot b^{\delta_i} \pmod{n} = c_i \cdot b^{\delta_i} \pmod{n}. \quad (2.4.6)$$

Поскольку все значения  $b^{\delta_i} \bmod n$  заранее вычислены, то для вычисления очередного значения  $c_{i+1}$  достаточно одной операции умножения и вычисления остатка по модулю  $n$ . Поэтому вторая стадия алгоритма Полларда выполняется очень быстро.

### Оценка эффективности $(p-1)$ -метода Полларда

Сделаем расчет времени работы алгоритма при условии, что параметры  $B_1$  и  $B_2$  выбраны. Время выполнения первой стадии зависит от числа простых чисел и их степеней на интервале  $[2; B]$ . Число простых чисел оценивается величиной  $\pi(B_1)$ , приближенно равной по теореме Чебышева числу  $B_1/\ln B_1$ . Для каждой степени  $p^r$ , меньшей  $B$ , производится  $r$  возведений в степень по модулю по алгоритму, описанному на с. ??, и требует  $\log_2 p \leq \log_2 B_1$  операций возведения в квадрат и умножений по модулю числа  $n$ . Поэтому общее число операций можно оценить величиной  $O(B_1 \log B_1 \log^2 N)$ . Метод очень быстро находит простые факторы малой и средней величины (до 20-25 десятичных цифр). Текущим рекордом для  $(p-1)$ -метода является простой делитель числа  $960^{119} - 1$ , состоящий из 66 десятичных цифр, установленный Т. Нохара (Т. Nohara) в 2006 г.

Использование второй стадии позволяет увеличить эффективность метода. По оценке Монтгомери, вторая стадия алгоритма требует

$$O(\log^2 B_2) + O(\log q_{\pi(B_1)}) + 2(\pi(B_2) - \pi(B_1))$$

умножений по модулю  $n$  и вычислений Н.О.Д. с  $n$ . Отбрасывая слагаемые меньшего порядка, получим оценку  $O(\pi(B_2))$ .

### Условие сходимости $(p-1)$ -метода Полларда

Пусть  $p$ -наименьший из делителей  $n$  и  $q^t$ -наибольшая степень простого числа, входящего в разложение  $p-1$ . Иначе говоря,  $q^t$  максимально среди всех степеней  $q_i^{t_i} | p-1$ . Отметим, что оценка сложности  $(p-1)$ -алгоритма определяется не размером факторизируемого числа  $n$ , а размером сомножителя  $q^t$  чисел  $p-1$  для  $p | n$ .

Если  $q^t \leq B_1$ , тогда вычисление закончится на первом этапе алгоритма. Иначе, для успеха алгоритма необходимо, чтобы выполнялось  $q^t \leq B_2$ , а все степени простых делителей  $(p-1)$  вида  $q^r$  кроме последнего были меньше  $B_1$ . Кроме того необходимо, чтобы среди делителей  $p-1$  не нашлось множителей вида  $r^k$  при  $k \geq 2$ , находящегося между  $B_1$  и  $B_2$ . Для таких  $r^k$  имеем два неравенства:

$$r^{k-1} \leq B, \quad B_1 < r^k < B_2,$$

откуда

$$B_1^{1/k} < p < \min\{B_1^{1/(k-1)}, B_2^{1/k}\}. \quad (2.4.7)$$

При  $B_2 = cB_1$  и  $k = 2$  уравнения (2.4.7) приобретут вид:

$$\sqrt{B_1} < r < \min\{B_1, \sqrt{cB_1}\}.$$

Поскольку значение границы  $B_2$  обычно выбирается так, чтобы выполнялось  $B_2 \leq B_1^2$ , последнее уравнение эквивалентно

$$\sqrt{B_1} < r < c_1 \sqrt{B_1}, \text{ где } c_1 = \sqrt{c}. \quad (2.4.8)$$

Общая доля чисел, удовлетворяющих (2.4.8), невелика и значительно меньше числа простых чисел из интервала  $(B_1, B_2)$ , поэтому ими можно пренебречь. Однако, если не пренебрегать этими числами и добавить в алгоритм дополнительный цикл по элементам  $r$ , удовлетворяющим условию (2.4.8), общее время алгоритма увеличится незначительно. Поскольку размер наибольшей степени  $q^t$  сильно зависит от степени гладкости числа  $p - 1$ , поэтому эффективность  $(p - 1)$ -метода Полларда сильно зависит от исходного числа  $n$ , изменяясь в широких пределах при различных  $n$  одинаковой длины. Поэтому одной из рекомендаций метода RSA является выбор  $n$  так, чтобы  $p - 1$  имел хотя-бы один большой делитель, превышающий размер границы  $B_2$ , до которой возможно выполнение реальных вычислений по  $(p - 1)$ -методу Полларда.

Скажем несколько слов о выборе исходного значения параметра  $a$ . Если  $p - 1$  имеет большое число различных делителей, то найдется много различных чисел  $a < n$ , для которых  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$  выполнится для  $k < p - 1$ . Найдутся даже такие  $a < n$ , что уже  $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ . Для таких  $a$  скорость схождения метода будет значительно выше. Поэтому, можно ускорить сходимость  $(p - 1)$ -метода Полларда, запуская алгоритм с несколькими значениями  $a$ . В статье «Pollard  $\rho$  on the Play Station 3», размещенной на сайте <http://www.hyperelliptic.org/tanja/SHARCS/slides09/03-bos.pdf>, приводятся примеры программирования алгоритмов факторизации, включая  $\rho$  и  $(p - 1)$  методы Полларда с возможностью распараллеливания на игровой консоли Sony Play Station 3, имеющей 8 сопроцессоров.

### Пример

Пусть  $p = 29$ -делитель  $n$ , тогда,  $p - 1 = 28 = 2^2 \cdot 7$ . Для каждого  $a \leq 28$  найдем наименьшее  $k$  такое, что  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ . Приведем фрагмент полученной таблицы:

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k	28	28	14	14	14	7	28	14	28	28	4	14	28	28	7	4

Среди 28 значений  $a < 29$  окажется 12 значение с показателем  $k = 28$ , по 6 значений с показателем  $k = 14$  и  $k = 7$ , 2 значения с  $k = 4$ , по одному с  $k = 2$  и  $k = 1$ . Математическое ожидание наименьшего показателя  $k$  равно:

$$M[k] = (12 \cdot 28 + 6 \cdot 14 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1) / 28 \approx 16,85$$

Таким образом, выбирая удачное  $a < n$ , можно получить значительный выигрыш по сравнению с произвольным.

### Дальнейшие улучшения алгоритма

Для ускорения всех вычислений Поллард предложил использовать быстрое преобразование Фурье (a Fast Fourier Transform) для всех основных операций.

Дальнейшие улучшения алгоритма были предложены П.Монтгомери [31]. Он заметил, что на второй стадии алгоритма большую часть времени отнимает вычисление для каждого простого числа  $q_i$  из интервала  $[B_1; B_2]$  Н.О.Д.  $(n, c_i - 1)$ , где  $c_i = b^{q_i}$ . Монтгомери предложил объединять несколько соседних элементов  $c_i$  в блоки  $G_j$  и вычислять сначала произведение  $h = \prod (c_i - 1) \bmod n$  для всех  $c_i \in G_j$ , а потом Н.О.Д.  $(n, h)$ . Если Н.О.Д.  $(n, c_i - 1) > 1$ , то таковым будет и Н.О.Д.  $(n, h)$ . Эти и другие улучшения, найденные Монтгомери, позволяют в несколько раз сократить общее время работы алгоритма.

На сайте [www.loria.fr/~zimmerma/records/Pminus1.html](http://www.loria.fr/~zimmerma/records/Pminus1.html) можно найти таблицу рекордов разложения натуральных чисел, установленных с помощью  $(p - 1)$ -метода Полларда.

### Упражнение.

Сформируйте множество  $E_n$  всех составных чисел  $n$  одинаковой длины, являющихся произведением двух простых чисел. Найдите для каждого числа  $n$  математическое ожидание  $M[k]$  наименьшего показателя  $k$  для множества элементов  $a < p$ , где  $p$  — наименьший делитель  $n$ . Распределите все числа из множества  $E_n$  в классы в зависимости от значения  $M[k]$ . Сделайте вывод о доле составных чисел, которые могут быть быстро разложены в произведение простых сомножителей с помощью  $(p - 1)$ -метода Полларда.

В разделе "Метод факторизации Ленстры" мы увидим, как идея  $(p - 1)$ -метода Полларда была использована Х.Ленстрой для построения нового более быстрого метода факторизации с использованием эллиптических кривых.



## 2.5 $(p + 1)$ –метод Вильямса

*Определение.* Последовательностью Люка (Lucas) назовем рекуррентную последовательность  $u_n$ , определяемую соотношениями:

$$u_0 = 0, \quad u_1 = u, \quad u_{n+1} = P \cdot u_n - Q \cdot u_{n-1}, \quad (2.5.9)$$

где  $P, Q$  – фиксированные целые числа.

$(p + 1)$ –метод Вильямса (Williams) похож на  $(p - 1)$ –метод Полларда и основан на предположении гладкости числа  $p + 1$ . Пусть  $p$ –простой делитель факторизируемого числа  $n$ , и выполнено разложение  $p + 1$

$$p + 1 = \prod_{i=1}^k q_i^{a_i}.$$

Обозначим через  $B = \max\{q_i^{a_i} | 1 \leq i \leq k\}$ . По-прежнему будем называть натуральное число  $r$   $B$ –степенно-гладким, если наибольшая степень сомножителя  $p_i^{a_i}$  в разложении  $r$  на простые множители, не превышает  $B$ . Таким образом, определенное выше число  $B$  является наименьшим числом, для которого  $p + 1$  является  $B$ –степенно-гладким. Отметим, что поскольку  $p$  не известно, то и  $B$  так же не известно.

Алгоритм Вильямса заключается в следующем:

1. Выбираем некоторое число  $B$ , являющее верхней границей для рассматриваемых простых чисел и их степеней.
2. Строим последовательность простых чисел  $2 < 3 < 5 < \dots < p_m$ , меньших  $B$  и последовательность степеней  $a_i$  такую, что  $p_i^{a_i} < B$ .
3. Полагаем число  $R = \prod_{i=1}^m q_i^{a_i}$ . Если  $p$  является  $B$ –степенно-гладким, то  $R$  делится на  $p$ .
4. Выбираем случайным образом числа  $P$  и  $Q$  и строим последовательность чисел Люка, пока не вычислим  $u_R$ .
5. Далее вычислим Н.О.Д.  $(n, u_R) = d$ . Если  $1 < d < n$ , то задача решена.

Доказано, что если  $Q$  взаимно просто с  $p$  и

$$\left( \frac{P^2 - 4Q}{p} \right) = -1,$$

то свойства последовательности Люка обеспечивают нахождение нетривиального делителя числа  $n$ .

## 2.6 $\rho$ -метод Полларда

Этот метод был разработан Джоном Поллардом в 1975 г. Пусть  $n$  – число, которое следует разложить.  $\rho$ -метод Полларда работает следующим образом:

1. Выбираем небольшое число  $x_0$  и строим последовательность чисел  $\{x_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , определяя каждое следующее  $x_{n+1}$  по формуле  $x_{n+1} = (x_n^2 - 1) \pmod{n}$ .
2. Одновременно на каждом шаге  $i$  вычисляем Н.О.Д  $d$  числа  $n$  и всевозможных разностей  $|x_i - x_j|$ , где  $j < i$ .
3. Когда будет найден  $d = \text{Н.О.Д.}(n, |x_i - x_j|)$ , отличный от 1, вычисление заканчивается. Найденное  $d$  является делителем  $n$ . Если  $n/d$  не является простым числом, то процедуру можно продолжить, взяв вместо  $n$  число  $n/d$ .

Вместо функции  $F(x) = (x^2 - 1) \pmod{n}$  в вычислении  $x_{n+1}$  можно взять другой многочлен, например,  $x^2 + 1$  или произвольный многочлен 2-й степени  $F(x) = ax^2 + bx + c$ .

Недостатком данного варианта метода является необходимость хранить большое число предыдущих значений  $x_j$ . Заметим, что если

$$(x_j - x_i) \equiv 0 \pmod{p}, \text{ то } (f(x_j) - f(x_i)) \equiv 0 \pmod{p},$$

поэтому, если пара  $(x_i, x_j)$  дает нам решение, то решение даст любая пара  $(x_{i+k}, x_{j+k})$ .

Поэтому, нет необходимости проверять все пары  $(x_i, x_j)$ , а можно ограничиться парами вида  $(x_i, x_j)$ , где  $j = 2^k$ , и  $k$  пробегает набор последовательных значений  $1, 2, 3, \dots$ , а  $i$  принимает значения из интервала  $[2^k + 1; 2^{k+1}]$ . Например, при  $k = 3$   $j = 2^3 = 8$ , а  $i \in [9; 16]$ .

```

int  $\rho$ -Pollard (int n)
{
  int x = random (1, n-2);
  int y = 1; int i = 0; int stage = 2;
  while(Н.О.Д.(n, abs(x - y)) = 1)
  {
    if (i == stage) {
      y = x;
      stage = stage*2; }
    x = x * x + 1(mod n);
    i = i + 1;
  }
  return Н.О.Д.(n, abs(x - y)); }

```

В этом варианте вычисление требует хранить в памяти всего три переменные  $n$ ,  $x$  и  $y$ , что выгодно отличает этот метод от других методов факторизации. Еще одна вариация  $\rho$ -метода Полларда была разработана Флойдом (Floyd). Согласно Флойду, значение  $y$  обновляется на каждом шаге по формуле  $y = F^2(y) = F(F(y))$ , поэтому на шаге  $i$  будут получены значения  $x_i = F^i(x_0)$ ,  $y_i = x_{2i} = F^{2i}(x_0)$ , и Н.О.Д. на этом шаге вычисляется между  $n$  и  $y - x$ .

### Обоснование $\rho$ -метода Полларда

Приведем обоснование этого метода и оценим его трудоемкость. Оценка основывается на известном «парадоксе дня рождения».

**Теорема 2.6.1** (*Парадокс дня рождения*) Пусть  $\lambda > 0$ . Для случайной выборки из  $l + 1$  элементов, каждый из которых меньше  $q$ , где  $l = \sqrt{2\lambda q}$ , вероятность того, что два элемента окажутся равными

$$p > 1 - e^{-\lambda}.$$

Отметим, что вероятность  $p = 0,5$  в парадоксе дня рождения достигается при  $\lambda \approx 0,69$ .

Пусть последовательность  $\{u_n\}$  состоит из разностей  $|x_i - x_j|$ , проверяемых в ходе работы алгоритма. Определим новую последовательность  $\{z_n\}$ , где  $z_n = u_n \bmod q$ ,  $q$  — меньший из делителей  $n$ . Все члены последовательности  $\{z_n\}$  меньше  $\sqrt{n}$ . Если рассматривать  $\{z_n\}$  как случайную последовательность чисел, меньших  $q$ , то, согласно парадоксу близнецов, вероятность того, что среди первых  $l + 1$  ее членов попадутся два одинаковых, превысит  $1/2$  при  $\lambda \approx 0,69$ , тогда  $l$  должно быть не меньше  $\sqrt{2\lambda q} \approx \sqrt{1,4q} \approx 1,18\sqrt{q}$ .

Если  $z_i = z_j$ , тогда  $x_i - x_j \equiv 0 \bmod q \rightarrow x_i - x_j = kq$  для некоторого  $k \in \mathbf{Z}$ . Если  $x_i \neq x_j$ , что выполняется с большой вероятностью, то искомый делитель

$q$  числа  $n$  будет найден как Н.О.Д.  $(n, x_i - x_j)$ . Поскольку  $\sqrt{q} \leq n^{1/4}$ , то с вероятностью, превышающей 0,5, делитель  $n$  может быть найден за  $1,18 \cdot n^{1/4}$  итераций.

Таким образом,  $\rho$ -метод Полларда является вероятностным методом, позволяющим найти нетривиальный делитель  $q$  числа  $n$  за  $O(q^{1/2}) \leq O(n^{1/4})$  итераций. Сложность вычисления нетривиального делителя в этом методе зависит только от размера этого делителя, а не от размера числа  $n$ . Поэтому,  $\rho$ -метод Полларда применим в тех случаях, когда другие методы факторизации, зависящие от размера  $n$ , становятся не эффективными.

Отметим, что в некоторых случаях, последовательность  $\{y_n\}$  может заикливаться (т.е. на некотором шаге  $t$  появляется  $x_t = x_0$ , после чего последовательность повторяется), тогда надо поменять исходный элемент  $x_0$  или полином  $F(x)$  на какой-нибудь другой.

### **Упражнения.**

1. Подберите несколько составных чисел  $n$  одинаковой длины, и выполните пробное разложение этих чисел методом Полларда. Вычислите среднее время (количество итераций) до нахождения нетривиального делителя  $n$ . Как сильно отличается время вычисления для различных  $n$ ?
2. Выполните упражнение 1 с алгоритмом Флойда. Сравните среднее время вычисления делителя в первом и втором случаях.

## **2.7 $\rho$ -метод Полларда для вычисления дискретного логарифма**

Проблема дискретного логарифма (Discrete Logarithm Problem DLP) состоит в вычислении в конечном поле  $F_q$  с образующей  $g$  для произвольного элемента  $t$  наименьшего числа  $k$  такого, что  $g^k = t$ . Хотя эта проблема не связана непосредственно с проблемой факторизации целых чисел, она играет важную роль в криптографии. При длине ключа  $L$  проблема DLP имеет такую же сложность решения, как и проблема факторизации числа длины  $L$ , поэтому на проблеме вычисления DLP построено много криптографических протоколов, в том числе, известные протоколы Диффи-Хелмана вычисления общего секретного ключа и Эль-Гамала электронной цифровой подписи.

Существует большое число различных методов для решения этой задачи. В главе 5 книги Л.Вашингтона [39] дано описание основных алгоритмов для ДЛЭК. В этом разделе мы рассмотрим  $\rho$ -метод Полларда для DLP, который играет здесь

ту же роль, что и  $\rho$ -метод Полларда для проблемы факторизации. Группу по умножению поля  $F_p$ ,  $p$ -простое число, обозначим через  $F_p^* = \{1, 2 \dots p-1\}$ . Напомним, что элемент  $g \in F_p^*$  называется генератором поля, если любой элемент  $t \in F_p^*$  равен некоторой степени элемента  $g$ :  $t = g^k$ . Пусть  $g$  – (какой-нибудь) генератор этой группы, и пусть  $t$  – произвольный элемент  $F_p^*$ .

Для нахождения неизвестного показателя  $k$  такого, что  $g^k = t$ , будем строить последовательность пар  $(a_i, b_i)$  чисел по модулю  $p-1$  и последовательность  $x_i$  чисел по модулю  $p$  такую что  $x_i = t^{a_i} g^{b_i}$ . Определим начальные значения  $a_0 = b_0 = 0, x_0 = 1$ . Вычисление последующих членов последовательностей будем выполнять по формулам:

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = \begin{cases} (a_i + 1, b_i) \bmod (p-1), & \text{если } 0 < x_i < p/3, \\ (2a_i, 2b_i) \bmod (p-1), & \text{если } p/3 < x_i < 2p/3, \\ (a_i, b_i + 1) \bmod (p-1) & \text{если } 2p/3 < x_i < p, \end{cases} \quad (2.7.10)$$

и, соответственно,

$$x_{i+1} = \begin{cases} tx_i \bmod p, & \text{если } 0 < x_i < p/3, \\ x_i^2 \bmod p, & \text{если } p/3 < x_i < 2p/3, \\ gx_i \bmod p & \text{если } 2p/3 < x_i < p, \end{cases} \quad (2.7.11)$$

Эта последовательность вычисляется до тех пор, пока не появятся номера  $i, j$  такие, что  $x_i = x_j$ . Тогда,  $t^{a_i} g^{b_i} = t^{a_j} g^{b_j}$ , откуда,

$$(a_j - a_i)k \equiv b_i - b_j \pmod{p-1} \quad (2.7.12)$$

Если Н.О.Д.  $(a_j - a_i, p-1) = 1$ , тогда множитель  $k$  в уравнении (2.7.12) может быть найден с использованием обобщенного алгоритма Евклида, решив в целых числах уравнение

$$x(a_j - a_i) + y(p-1) = b_i - b_j \quad (2.7.13)$$

относительно  $x, y$  и определяя  $k = x \bmod (p-1)$ .

Если же Н.О.Д.  $(a_j - a_i, p-1) = d > 1$ , тогда, уравнение (2.7.13) по-прежнему, разрешимо, но дает решение нашего уравнения с точностью до слагаемого кратного  $(p-1)/d$ , т.е. решение имеет вид

$$x = x_0 + m(p-1)/d \quad (2.7.14)$$

где  $m \in [0, d-1]$  – целое число. Если множитель  $d$  – мал, то решение будет найдено подстановкой чисел (2.7.14) в уравнение  $g^x \equiv t \bmod p$ .

Так же, как в  $\rho$ -методе факторизации, в этом алгоритме можно использовать модификацию Флойда, вычисляя на  $i$ -м шаге одновременно тройку  $(a_i, b_i, x_i)$

и тройку  $(a_{2i}, b_{2i}, x_{2i})$ , пока не дойдем до шага  $i$ , на котором  $x_i = x_{2i}$ . В этом варианте опять не надо хранить в памяти на шаге  $i$  все тройки  $(a_j, b_j, x_j)$  для  $j \leq i$ , а достаточно сохранять две тройки  $(a_i, b_i, x_i)$  и  $(a_{2i}, b_{2i}, x_{2i})$ .

**Пример.** Рассмотрим поле  $F_p$  при  $p = 43$ . Элемент  $g = 2$  не является генератором по критерию Поклингтона, т.к.  $2^{14} \bmod 43 = 1$ . Возьмем в качестве генератора элемент  $g = 3$  и решим уравнение

$$3^X \bmod 43 = 15. \quad (2.7.15)$$

Итак,  $p = 43$ ,  $g = 3$ ,  $t = 15$ . Определим  $(0, b_0, x_0) = (0, 0, 1)$ , и будем строить две последовательности  $(a_i, b_i, x_i)$  и  $(a_{2i}, b_{2i}, x_{2i})$  по формулам (2.7.10) и (2.7.11):

$i$	$a_i$	$b_i$	$x_i$	$a_{2i}$	$b_{2i}$	$x_{2i}$
<b>1</b>	2	0	10	6	0	11
<b>2</b>	3	0	21	7	1	22
<b>3</b>	6	0	11	15	2	36
<b>4</b>	7	0	36	30	6	11
<b>5</b>	7	1	22	31	7	22

На 5-м шаге значения  $x_i$  и  $x_{2i}$  совпали. Составим уравнение (2.7.13):

$$x(31 - 7) + y(43 - 1) \equiv 1 - 7 \pmod{42}, \quad \text{или,} \quad 24x + 42y \equiv 36 \pmod{42}.$$

Вычислим Н.О.Д.  $(a_j - a_i, p - 1) = \text{Н.О.Д.}(24, 42) = 6 \neq 1$ .

Поделим все коэффициенты уравнения на 6:

$$4x + 7y \equiv 6 \pmod{42}.$$

С помощью расширенного алгоритма Евклида решим уравнение  $4x + 7y = 1$ , подставляя вместо  $A$  и  $B$  коэффициенты этого уравнения (поменяв их местами, чтобы  $A$  было больше  $B$ ):

A	B	A mod B	A div B	y	x
7	4	3	1	-1	2
4	3	1	1	1	-1
3	1	0	3	0	1

Таким образом,  $7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 1$ , или,  $7 \cdot (-6) + 4 \cdot 12 = 6$ . Положим,  $x_0 = x = 12$ . Поскольку,  $d > 1$ , то корень  $X$  уравнения (2.7.15) определяется с точностью до слагаемое  $(p - 1)/d = 7$ , т.е. имеет вид  $X = x_0 + 7k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ . Будем подставлять в (2.7.15) последовательно числа 12, 19, 25, ..., пока не получим тождество  $3^{25} \bmod 43 = 15$ . Задача решена.

## Глава 3

# Криптографические методы, основанные на задаче дискретного логарифмирования в конечном поле

Напомним, что в конечном поле  $F_q$ ,  $q = p^k$ , для произвольных элементов  $a, b \in F_q$  дискретным логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  называется натуральное число  $k$  такое, что

$$a^k = b \text{ в поле } F_q$$

Если степень расширения поля  $k = 1$  т.е.  $q = p$  является простым числом, то последнее условие можно переписать в виде

$$a^k \bmod p = b$$

Задача вычисления дискретного логарифма при заданных значениях  $p$ ,  $a$ ,  $b$  называется задачей дискретного логарифмирования в конечном поле ДЛП.

Существует тривиальный переборный алгоритм вычисления степени  $k$  путем сравнения элементов  $a^x \bmod p$  и  $b$  для  $x = 0, 1, 2, \dots$  до их совпадения. Этот алгоритм работает очень медленно и имеет сложность экспоненциальную сложность относительно длины  $L$  размерности  $q$ .

В первой главе был описан  $\rho$ -алгоритм Полларда, основанный на парадоксе дня рождения, имеющий сложность  $O(2^{L/2})$ . Самым быстрым на сегодняшний день является алгоритм *решета числового поля*, имеющий субэкспоненциальную сложность.

Принято считать, что длина размерности поля, при которой дискретный логарифм не вычислим, равна 1024 бита или более, что соответствует длине числа

$n = p \cdot q$  в методе RSA. Поэтому методы, использующие трудноразрешимость задачи ДЛП, имеют ключи той же длины, что и метод RSA, основанный на трудноразрешимость задачи факторизации.

### 3.1 Протокол Диффи-Хеллмана

Этот протокол предназначен для формирования общего секретного ключа для двух удаленных пользователей, общающихся через открытые сети. Обозначим этих пользователей буквами  $A$  и  $B$ .

#### Алгоритм протокола Диффи-Хеллмана.

**I.** Первая часть протокола состоит в генерации ключей – простого числа  $p$  длины 1024 бита или более, и нахождения генератора группы по умножению поля  $F_p$ . Напомним, что элемент  $a$ ,  $1 < a < p$ , называется генератором (порождающим элементом), если любой другой ненулевой элемент  $b \in F_p$ ,  $b \neq 0$ , является степенью элемента  $a$ .

**Пример.** Пусть  $p = 13$ . Вычислим все степени элементов 2 и 3 в поле  $F_{13}$ :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^k \bmod 13$	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1
$3^k \bmod 13$	3	9	1	3	9	1	3	9	1	3	9	1

Таким образом, 2 является генератором поля, а 3 – нет. Для поиска простого числа  $p$  можно воспользоваться тестом Миллера-Рабина. Выбирается произвольное нечетное простое число  $t$  заданной длины, проверяется условие  $t \bmod q \neq 0$  для всех небольших простых чисел, затем выполняется несколько раундов проверок алгоритма Миллера-Рабина. Если число не проходит этот тест, то рассмотрим следующее число  $t + 2$  и т.д.

Для поиска порождающего элемента можно проверять все элементы подряд, начиная от 2, непосредственным возведением в степень, либо используя тест Поклингтона.

После того, как число  $p$  и генератор  $g$  поля  $F_p$  найдены, эти параметры распространяются среди участников протокола. Параметры  $p$  и  $a$  не являются секретными, и их передача выполняется по открытому каналу. Эти параметры могут быть использованы многократно.

**II.** Вторая часть состоит в выработке общего секретного ключа и состоит из следующих шагов:

1. Участник  $A$  выбирает случайное число  $1 < a < p$ , а участник  $B$  –  $1 < b < p$ . Потом участники вычисляют  $x = g^a \bmod p$  и  $y = g^b \bmod p$  и пересылает их



открыто другому участнику.

2. После обмена числами участники вычисляют общий ключ  $k$  по формулам

$$A : y^a \bmod p = g^{ba} \bmod p = k$$

$$B : x^b \bmod p = g^{ab} \bmod p = k$$

Противник, перехватывая пересылаемые данные, получит в свое распоряжение параметры  $\langle p, g, x = g^a, y = g^b \rangle$ , которых будет недостаточно для вычисления  $k$ . Для вычисления  $k$  необходимо найти параметры  $a$  или  $b$ , решая проблему ДЛП.

Этот протокол уязвим к атаке "человек-посередине", которая возможна, если противник имеет возможность перехватывать сообщения от  $A$  к  $B$  и обратно и заменять их своими данными. Тогда секретный ключ будет сформирован противником, который получит доступ к переписке.

Для исправления ситуации в протокол необходимо добавить процедуру аутентификации участников с использованием *электронной цифровой подписи*.

Описание понятия электронной цифровой подписи в следующем параграфе.

## 3.2 Электронная цифровая подпись и ее свойства

Одной из наиболее важных задач информационной безопасности является сохранение целостности (неизменности) электронных документов, передаваемых через каналы связи. Развитие современных средств безбумажного документооборота, средств электронных платежей немыслимо без развития средств доказательства подлинности и целостности документа. Таким средством является электронная цифровая подпись (ЭЦП), которая сохранила основные свойства обычной подписи. Такими свойствами подписи являются:

1. Аутентичность – ЭЦП является доказательством того факта, что подпись принадлежит подписывающему;
2. Подпись неподделываема; то есть служит доказательством того, что только тот человек, чей автограф стоит на документе, мог подписать данный документ, и никто иной.
3. Подпись непереносима, т.к. является частью документа и поэтому перенести ее на другой документ невозможно.
4. Документ с подписью является неизменяемым.

5. Подпись неоспорима – любое лицо, владеющее образцом подписи может удостовериться, что документ подписан владельцем подписи.

Существует несколько методов построения ЭЦП, а именно: шифрование электронного документа (ЭД) на основе симметричных алгоритмов. Данная схема предусматривает наличие в системе третьего лица-арбитра, пользующегося доверием обеих сторон. Авторизацией документа в данной схеме является сам факт шифрования ЭД секретным ключом и передача его арбитру. Использование ассиметричных алгоритмов шифрования. Фактом подписания документа является шифрование его на секретном ключе отправителя.

Развитием предыдущей идеи стала наиболее распространенная схема ЭЦП - шифрование окончательного результата обработки ЭД хеш-функцией при помощи асимметричного алгоритма. Кроме перечисленных, существуют и другие методы построения схем ЭЦП - групповая подпись, неоспариваемая подпись, доверенная подпись и др. Появление этих разновидностей обусловлено разнообразием задач, решаемых с помощью электронных технологий передачи и обработки электронных документов.

Электронная цифровая подпись используется физическими и юридическими лицами в качестве аналога собственноручной подписи для придания электронному документу юридической силы, равной юридической силе документа на бумажном носителе, подписанного собственноручной подписью правомочного лица и скрепленного печатью. ЭЦП - это программно-криптографическое средство, которое обеспечивает решение следующих задач:

1. проверку целостности документов;
2. идентификация лица, отправившего документ;

Следует отметить, что конфиденциальность документа, т.е. скрывание его содержания от третьих лиц, электронная цифровая подпись не обеспечивает.

Правовые основы электронной цифровой подписи регламентируются несколькими законами Российской Федерации. В частности, пункт 3 статьи 5 Федерального закона "Об информации, информатизации и защите информации" гласит: "Юридическая сила документа, хранимого, обрабатываемого и передаваемого с помощью автоматизированных информационных и телекоммуникационных систем, может подтверждаться электронной цифровой подписью. 10 января 2002 года Президентом РФ был подписан очень важный закон "Об электронной цифровой подписи" номер 1-ФЗ (принят Государственной Думой 13 декабря 2001 года), развивающий и конкретизирующий основные положения закона "Об информации, информатизации и защите информации". Его роль поясняется в статье 1. 1. Целью настоящего Федерального закона является обеспечение

правовых условий использования электронной цифровой подписи в электронных документах, при соблюдении которых электронная цифровая подпись в электронном документе признается равнозначной собственноручной подписи в документе на бумажном носителе. 2. Действие настоящего Федерального закона распространяется на отношения, возникающие при совершении гражданско-правовых сделок и в других предусмотренных законодательством Российской Федерации случаях. Действие настоящего Федерального закона не распространяется на отношения, возникающие при использовании иных аналогов собственноручной подписи.

Закон вводит *следующие* основные понятия:

*Электронный документ* - документ, в котором информация представлена в электронно-цифровой форме.

*Электронная цифровая подпись* - реквизит электронного документа, предназначенный для защиты данного электронного документа от подделки, полученный в результате криптографического преобразования информации с использованием закрытого ключа электронной цифровой подписи и позволяющий идентифицировать владельца сертификата ключа подписи, а также установить отсутствие искажения информации в электронном документе.

*Владелец сертификата ключа подписи* - физическое лицо, на имя которого удостоверяющим центром выдан сертификат ключа подписи и которое владеет соответствующим закрытым ключом электронной цифровой подписи, позволяющим с помощью средств электронной цифровой подписи создавать свою электронную цифровую подпись в электронных документах (подписывать электронные документы).

*Средства электронной цифровой подписи* - аппаратные и (или) программные средства, обеспечивающие реализацию хотя бы одной из следующих функций: создание электронной цифровой подписи в электронном документе с использованием закрытого ключа электронной цифровой подписи, подтверждение с использованием открытого ключа электронной цифровой подписи подлинности электронной цифровой подписи в электронном документе, создание закрытых и открытых ключей электронных цифровых подписей.

*Сертификат средств электронной цифровой подписи* - документ на бумажном носителе, выданный в соответствии с правилами системы сертификации для подтверждения соответствия средств электронной цифровой подписи установленным требованиям.

*Закрытый ключ* электронной цифровой подписи - уникальная последовательность символов, известная владельцу сертификата ключа подписи и предназначенная для создания в электронных документах электронной цифровой подписи с использованием средств электронной цифровой подписи.

*Открытый ключ* электронной цифровой подписи - уникальная последовательность символов, соответствующая закрытому ключу электронной цифровой подписи, доступная любому пользователю информационной системы и предназначенная для подтверждения с использованием средств электронной цифровой подписи подлинности электронной цифровой подписи в электронном документе.

*Сертификат ключа подписи* - документ на бумажном носителе или электронный документ с электронной цифровой подписью уполномоченного лица удостоверяющего центра, которые включают в себя открытый ключ электронной цифровой подписи и выдаются удостоверяющим центром участнику информационной системы для подтверждения подлинности электронной цифровой подписи и идентификации владельца сертификата ключа подписи.

*Подтверждение подлинности* электронной цифровой подписи в электронном документе - положительный результат проверки соответствующим сертифицированным средством электронной цифровой подписи с использованием сертификата ключа подписи принадлежности электронной цифровой подписи в электронном документе владельцу сертификата ключа подписи и отсутствия искажений в подписанном данной электронной цифровой подписью электронном документе.

*Пользователь сертификата ключа подписи* - физическое лицо, использующее полученные в удостоверяющем центре сведения о сертификате ключа подписи для проверки принадлежности электронной цифровой подписи владельцу сертификата ключа подписи.

*Информационная система общего пользования* - информационная система, которая открыта для использования всеми физическими и юридическими лицами и в услугах которой этим лицам не может быть отказано.

*Корпоративная информационная система* - информационная система, участниками которой может быть ограниченный круг лиц, определенный ее владельцем или соглашением участников этой информационной системы.

Юридическая сила электронной цифровой подписи признается при наличии в автоматизированной информационной системе программно-технических средств, обеспечивающих идентификацию подписи, и соблюдении установленного режима их использования". Такая формулировка предполагает, что электронный документ может быть заверен ЭЦП и использован в тех случаях, когда явно не предусмотрены другие требования к форме документа, т.е. введение данной нормы, по существу, не расширило возможности использования ЭДО в гражданском обороте. Развитие основных типов криптографических протоколов (ключевой обмен, электронная цифровая подпись (ЭЦП), аутентификация и др.) было бы невозможно без создания открытых ключей и построенных на их

основе асимметричных протоколов шифрования. Эти методы рассматриваются в следующем разделе.

### 3.3 Односторонние функции. Хеш-функции

Односторонняя (однонаправленная) функция (one way function) - это отображение  $X \rightarrow Y$ , где  $X$  и  $Y$  - произвольные множества, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Для каждого  $x$  из области определения функции  $f$  легко вычислить  $f(x)$ . Понятие "легко" обычно означает, что существует алгоритм, вычисляющий функцию  $f(x)$  за полиномиальное время от длины аргумента  $x$ .
2. Задача нахождения прообраза  $x$  для произвольного  $y$ , принадлежащего области значений функции  $f$ , является вычислительно сложной задачей. Последнее означает, что не существует алгоритма, вычисляющего существовавшее быстрее, чем алгоритм полного перебора.

**Пример 1.** Задача вычисления простых множителей натурального числа  $n$  (факторизация  $N$ ) является односторонней функцией – самый быстрый известный алгоритм факторизации – метод решета числового поля имеет субэкспоненциальную верхнюю оценку времени своей работы. На вычислительной сложности решения этой задачи построен один из самых известных асимметричных методов криптографии - метод RSA.

**Пример 2.** Примером односторонней функции может служить вычисление функции  $f(x) = a^x \bmod n$ , где  $a$  и  $n$  - некоторые фиксированные натуральные числа. Задача вычисления обратного значения  $x$  по известному  $f(x)$  называется задачей дискретного логарифмирования. На вычислительной сложности задачи дискретного логарифмирования основан один из распространенных методов двухключевой криптографии - метод Эль-Гамала.

**Пример 3.** Функция  $f(k) = [k]P$  вычисления кратного точки  $p$  эллиптической кривой: даны конечное поле  $GF_q$ , эллиптическая кривая  $E$  над полем  $GF_q$ , точка  $P$  на кривой  $E$ . По известным координатам точки  $P$  и аргументу  $k$  функция  $f$  вычисляет координаты т.  $[k]P$ . Эта задача полиномиально вычислима.

Обратная задача нахождения координат т.  $P$  по известным  $k$  и координатам т.  $[k]P$  является вычислительно сложной задачей, имеющей субэкспоненциальный алгоритм вычисления.

**Пример 4.** Примером использования односторонней функции может служить следующая схема аутентификации. Абоненты  $A$  и  $B$  договариваются при встрече или вырабатывают с помощью протокола Диффи-Хеллмана общий ключ  $x$ . Теперь когда абоненты выходят на связь, то один из них, скажем  $A$ , посылает другому послание  $M$ , некоторое число  $k > 2$  и число  $y$ , равное результату применения к аргументу  $x$   $k$ -кратной итерации односторонней функции  $f(x)$ :

$$y = f^{(k)}(x) = f(f(\dots(x)\dots))$$

Абонент  $B$ , получив число  $k$ , также вычисляет значение  $y = f^{(k)}(x)$  и сравнивает его с полученным. Если результат совпал, то сообщение  $M$  получено именно от абонента  $A$ . Абонент  $B$ , возвращая ответное послание  $M_2$ , прикладывает к нему значение  $y_{k-1} = f^{(k-1)}(x)$ . Взломщик не может подделать сообщение  $y_{k-1}$ , т.к. даже зная  $f^{(k)}(x)$ , он не может вычислить  $y = f^{(k-1)}(x)$ . При следующем обмене пересылается число  $y_{k-2} = f^{(k-2)}(x)$ , и т.д., что обеспечивает взаимную аутентификацию при каждом новом сеансе связи.

## Хеш-функции

Хеш-функции играют в информационной защите важную роль, создавая для электронного документа его "моментальный снимок" и тем самым защищая документ от дальнейшей модификации или подмены. В широком смысле функцией хеширования называется функция  $H$ , удовлетворяющая следующим основным свойствам:

1. Хеш-функция  $H$  может применяться к блоку данных любой длины.
2. Хеш-функция  $H$  создает выход фиксированной длины (равно, например, 128 бит для классической функции хеширования MD5, и 160 бит для американского стандарта хеш-функций SHA1).
3. Значение  $H = h(M)$  вычисляется относительно быстро (за полиномиальное время от длины сообщения  $M$ ).
4. Для любого данного значения хеш-кода  $H$  вычислительно невозможно найти  $M$  такое, что  $h(M) = H$ .
5. Для любого данного  $y$  вычислительно невозможно найти  $x$  такое, что  $y = h(x)$ .
6. Вычислительно невозможно найти произвольную пару  $(x, y)$  такую, что  $H(y) = H(x)$ .

Термин вычислительно невозможно означает здесь, что в настоящее время решение этой задачи либо требует слишком большого интервала времени (например, более сотни лет), либо использования слишком больших вычислительных ресурсов, чтобы решение задачи имело смысл. Первые три свойства требуют, чтобы хеш-функция создавала хеш-код для любого сообщения. Четвертое свойство определяет требование односторонности хеш-функции: легко создать хеш-код по данному сообщению, но невозможно восстановить сообщение по данному хеш-коду. Это свойство важно, если аутентификация с использованием хеш-функции включает секретное значение. Само секретное значение может не посылаться, тем не менее, если хеш-функция не является односторонней, противник может легко раскрыть секретное значение следующим образом. При перехвате передачи атакующий получает сообщение  $M$  и хеш-код  $H = h(S_{AB}||M)$ . Если атакующий может инвертировать хеш-функцию, то, следовательно, он может получить  $S_{AB}||M = H^{-1}(C)$ . Так как атакующий теперь знает и  $M$ , и  $S_{AB}||M$ , получить  $S_{AB}$  совсем просто, здесь  $||$  обозначает операцию конкатенации (соединения) двух текстов. Пятое свойство гарантирует, что невозможно найти другое сообщение, чье значение хеш-функции совпадало бы со значением хеш-функции данного сообщения. Это предотвращает подделку аутентификатора при использовании зашифрованного хеш-кода. В данном случае противник может читать сообщение и, следовательно, создать его хеш-код. Но так как противник не владеет секретным ключом, он не имеет возможности изменить сообщение так, чтобы получатель этого не обнаружил. Если данное свойство не выполняется, атакующий имеет возможность выполнить следующую последовательность действий: перехватить сообщение и его зашифрованный хеш-код, вычислить хеш-код сообщения, создать альтернативное сообщение с тем же самым хеш-кодом, заменить исходное сообщение на поддельное. Поскольку хеш-коды этих сообщений совпадают, получатель не обнаружит подмены. Хеш-функция, которая удовлетворяет первым пяти свойствам, называется простой или слабой хеш-функцией. Если кроме того выполняется шестое свойство, то такая функция называется сильной хеш-функцией. Шестое свойство защищает против класса атак, известных как атака "день рождения".

## Вычисление хеш-функций

Все хеш-функции вычисляются следующим образом. Входное значение (сообщение, файл и т.п.) рассматривается как последовательность  $n$ -битовых блоков. Входное значение обрабатывается последовательно блок за блоком, и создается  $m$ -битовое значение хеш-кода. Одним из простейших примеров хеш-функции

является побитовый XOR каждого блока:

$$C_i = b_{i1} \oplus b_{i2} \oplus \dots b_{ik},$$

где  $C_i$  -  $i$ -й бит хеш-кода,  $1 \leq i \leq n$ ,  $k$  - число  $n$ -битовых блоков входа,  $b_{ij}$  -  $i$ -й бит в  $j$ -ом блоке.  $\oplus$  - операция XOR (сложения по модулю 2).

В результате получается хеш-код длины  $n$ , известный как продольный избыточный контроль. Это эффективно при случайных сбоях для проверки целостности данных. Часто при использовании подобного продольного избыточного контроля для каждого блока выполняется однобитовый циклический сдвиг после вычисления хеш-кода. Это можно описать следующим образом:

1. Установить  $n$ -битовый хеш-код в ноль.
2. Для каждого  $n$ -битового блока данных выполнить следующие операции:  
 Сдвинуть циклически текущий хеш-код влево на один бит,  
 Выполнить операцию XOR для очередного блока и хеш-кода.

Это даст эффект "случайности" входа и уничтожит любую регулярность, которая присутствует во входных значениях.

Хотя второй вариант считается более предпочтительным для обеспечения целостности данных и предохранения от случайных сбоев, он не может использоваться для обнаружения преднамеренных модификаций передаваемых сообщений. Зная сообщение, атакующий легко может создать новое сообщение, которое имеет тот же самый хеш-код. Поэтому, чтобы защитить хеш от подделки его дополнительно надо зашифровать, используя ключ, не известный противнику. Такой зашифрованный хеш называется электронной цифровой подписью сообщения.

### 3.4 Алгоритм создания электронной цифровой подписи.

Электронная цифровая подпись может быть создана на основе симметричных алгоритмов, однако гораздо удобнее ее создавать, используя асимметричные алгоритмы таких, как приведенные выше RSA, схема Эль-Гамала и шифрование на эллиптических кривых. Схема создания ЭЦП на асимметричных алгоритмах является одной и той же для любого метода и состоит из следующих шагов:

1. Сжатия электронного документа (файла) с помощью стандартной хеш-функции,
2. Шифрование хеш-свертки с помощью метода асимметричного шифрования.



Полученная строка  $DS = Enc(h(F))$  и есть электронная цифровая подпись (digital signature) для сообщения  $F$ . Она прикладывается к файлу  $F$  и пересылается получателю, который получив пакет  $\langle F_1, DS \rangle$  проверяет подлинность подписи, выполняя следующие действия:

1. Расшифровывает подпись, вычисляя  $Enc^{-1}(DS) = h(F)$ ,
2. Вычисляет хеш-значение  $h(F_1)$ , подставляя в качестве аргумента полученный файл  $F_1$ ,
3. Проверяет условие  $h(F_1) = h(F)$ . Если условие выполняется, то подпись верна, т.е. файл  $F$  соответствует своей подписи и не был изменен после того, как была вычислена подпись. Потенциальный взломщик не мог подделать подпись, поскольку для вычисления подписи необходимо знание закрытого ключа отправителя. Однако проверку целостности пакета по ЭЦП может осуществить любой человек, владеющий открытым ключом отправителя.

Отметим, что открытые ключи всех пользователей должны быть доступны любому зарегистрированному пользователю для проверки полученных пакетов. Для этого в сети должен быть установлен защищенный сервер аутентификации, который предоставляет указанные данные зарегистрированным пользователям по их запросам. Также задачей этого сервера является публикация скомпрометированных или вышедших из употребления по сроку действия ключей. Для того, чтобы обмануть получателя, потенциальный взломщик должен уметь выполнять один из следующих наборов действий:

1. Иметь доступ к закрытому ключу отправителя, перехватывать послания и заменять их своими, создавая новую подпись с использованием закрытого ключа отправителя;
2. Либо взломав сервер аутентификации, заменить открытые ключи пользователей своими ключами, перехватывать послания и заменять их своими, создавая новую подпись с использованием собственного закрытого ключа, парного тому который был установлен на скомпрометированный сервер аутентификации вместо исходного открытого ключа отправителя.

Нетрудно проверить, что все свойства ЭЦП, перечисленные на с.33, выполняются для ЭЦП, сформированной на этом алгоритму. В следующем параграфе мы рассмотрим алгоритм построения ЭЦП, разработанный египетским криптографом Т. Эль-Гамалем.

### 3.5 Алгоритм построения ЭЦП Эль-Гамала

В 1985 году Т.Эль-Гамаль предложил следующую схему шифрования на основе возведения в степень по модулю большого простого числа  $P$ . Алгоритм Эль-Гамала может использоваться для формирования электронной подписи или для шифрования данных. Он базируется на трудности вычисления дискретного логарифма.

Также, как в протоколе Диффи-Хеллмана (см. раздел 3.1), сначала генерируется пара  $\langle p, g \rangle$ , состоящая из большого простого числа  $p$  и генератора  $g$  поля  $F_p$ . Эти параметры являются открытыми параметрами протокола Эль-Гамала. Далее генерируются открытый и закрытый ключи:

#### 1. Генерация ключей пользователя:

1. Сначала генерируется закрытый ключ пользователя, как произвольное число  $x$ ,  $1 < x < p$ ,
2. Вычисляет открытый ключ по формуле  $y = g^x \bmod p$ ,

#### 2. Шифрование сообщения $M$ :

1. Сначала генерируется случайное число  $k$ ,  $1 < k < p$ , взаимно-простое с  $p - 1$ , т.е. Н.О.Д( $p - 1, k$ ) = 1,
2. Вычисляем  $a = g^k \bmod p$ ,
3. Вычисляем  $b = y^k \cdot M \bmod p$ .

Пара  $\langle a, b \rangle$  является шифром сообщения  $M$ .

#### III. Расшифровка кода $\langle a, b \rangle$ :

Вычисляем исходное сообщение  $M$  по формуле:

$$M = b \cdot a^{-x} \bmod p$$

Отметим, что поскольку  $a^{p-1} \bmod p = 1$ , то чтобы не вычислять обратные элементы в поле  $F_p$ , можно использовать прямое вычисление  $M$  по формуле:

$$M = b \cdot a^{p-1-x} \bmod p.$$

**Пример.** Выберем  $p = 11$ ,  $g = 2$ , секретный ключ  $x = 8$ . Вычисляем  $y = g^x \bmod p = 3$ . Начальные параметры шифрования подготовлены.

Пусть сообщение  $M = 5$ . Выбираем случайное число  $k = 9$ . Убедимся, что  $\text{Н.О.Д.}(k, p-1) = \text{Н.О.Д.}(9, 10) = 1$ .

Вычисляем пару  $(a, b)$ :

$$a = g^k \bmod p = 2^9 \bmod 11 = 3, \quad b = y^k \cdot M \bmod p = 3^9 \cdot 5 \bmod 11 = 9.$$

Получена шифрограмма  $(a, b) = (6, 9)$  для сообщения  $M = 9$ .

Расшифровки сообщения  $(a, b)$ :

$$M = b \cdot a^{p-1-x} \bmod p = M = 9 \cdot 6^{11-1-8} \bmod 11 = 9 \cdot 36 \bmod 11 = 5$$

**Замечание.** При сетевом обмене сообщениями отправитель  $A$  использует для шифрования открытый ключ получателя  $B$ , поскольку только  $B$  должен иметь возможность расшифровывать адресованные ему послания. Ответные сообщения  $B$  должен шифровать, используя открытый ключ  $A$ .

Рассмотрим далее **алгоритм Эль-Гамала построения электронной цифровой подписи**:

Генерация параметров поля  $F_p$  и выбор закрытого  $x$  и открытого  $y$  ключей пользователя происходит как и в случае шифрования. Существенная разница состоит в том, что ЭЦП строится с использованием не открытого ключа получателя, а *закрытого ключа самого отправителя*. Итак, пусть  $H$  — хеш сообщения, на которое накладывается ЭЦП.

1. Генерируется случайное число  $k$ ,  $1 < k < p$ , взаимно-простое с  $p-1$ , т.е.  $\text{Н.О.Д.}(p-1, k) = 1$ ,
2. Вычисляем  $a = g^k \bmod p$ ,
3. Вычисляем  $b$ , решая уравнение

$$H = x \cdot a + k \cdot b \bmod (p-1),$$

используя расширенный алгоритм Евклида.

Пара  $(a, b)$  является подписью для сообщения с хешем  $h$ .

Проверка подписи получателем сводится к вычислению хеша  $H = h(M)$  полученного сообщения  $M$  и проверке условия:

$$y^a \cdot a^b \bmod p = g^H \bmod p$$

Приведем доказательство того, что последнее условие действительно обеспечивает целостность послания:

$$y^a \cdot a^b \bmod p = (g^x)^a \cdot (g^k)^b \bmod p = g^{xa+kb} \bmod p$$

В силу малой теоремы Ферма  $g^{p-1} \bmod p = 1$ , поэтому возведение  $g$  в степень  $H$  дает тот же результат, что и возведение в степень  $xa + kb$ , т.к. их разность делится на  $p - 1$ . Утверждение доказано.

**Пример.** Выберем параметры поля и ключи также, как предыдущем примере:  $p = 11$ ,  $g = 2$ ,  $x = 8$ ,  $y = 3$ . Пусть хеш сообщения  $H = 5$ . Вычислим подпись:

1. Вычисляем  $a = g^k \bmod p = 2^9 \bmod 11 = 3$ ,
2. Вычисляем  $b$ , используя расширенный алгоритм Евклида:

$$H = x \cdot a + k \cdot b \bmod (p - 1), \text{ или, } 5 = 8 \cdot 6 + 9 \cdot b \bmod 10 \rightarrow b = 3.$$

Подпись  $(a, b)$  равна  $(6, 3)$ . Выполним **проверку подписи**:

$$y^a \cdot a^b \bmod p = 3^6 \cdot 6^3 \bmod 11 = 729 \cdot 216 \bmod 11 = 10,$$

$$g^H \bmod p = 2^5 \bmod 11 = 10. \text{ Подпись верна!}$$

## Глава 4

# Эллиптические кривые и их приложения в криптографии

Хотя эллиптические кривые (Elliptic Curves) исследовались на протяжении более сотни лет, интерес к ним проявляли исключительно узкие специалисты в области теории чисел. Так было примерно до 1985 г., пока одновременно и независимо Н. Коблиц (N. Coblitz) и В. Миллер (V. Miller) не предложили использовать эллиптические кривые для построения криптосистем с открытым ключом.

После этого интерес к эллиптическим кривым стал расти в геометрической прогрессии. Были найдены приложения инструмента ЭК в разных областях криптографии таких, как теория кодирования, генерация псевдослучайных последовательностей, алгоритмическая теория чисел для построения тестов на простоту и, наконец, для создания одного из самых красивых методов факторизации целых чисел (Х. Ленстра [25]).

Метод факторизации Ленстры можно рассматривать как модификацию  $(p-1)$ -метода Полларда (см. разд. 2.4). Он является самым быстрым среди всех методов, упомянутых ранее. Как и  $(p-1)$ -метод Полларда, сложность этого метода определяется величиной не самого числа  $n$ , а величиной его наименьшего делителя, поэтому, даже если число  $n$  очень велико и недоступно другим алгоритмам, оно может быть проверено с помощью метода факторизации эллиптических МФЭК. Подобно  $(p-1)$ -методу Полларда (см. разд. 2.4), МФЭК состоит из двух стадий. Первая стадия алгоритма была разработана самим Ленстрой и имеет единственный вариант. Вторая стадия имеет несколько вариаций. Одна из них, основанная на парадоксе близнецов, была предложена Брентом. [9].

В этой главе мы рассмотрим основные свойства эллиптических кривых и их приложения в теории чисел и криптографии. Среди литературы на русском языке, относящейся к теме эллиптических кривых отметим, в первую очередь,

книгу Н. Коблица «Курс теории чисел и криптографии» [59] и две книги А. Болотова, С. Гашкова, А. Фролова и А. Часовских под названием «Элементарное введение в эллиптическую криптографию» [47] и «Алгоритмические основы эллиптической криптографии» [48]. На английском языке следует отметить, в первую очередь, 2-е издание книги Л. Вашингтона «Elliptic Curves Number Theory and Cryptography». [39] Хороший обзор по алгоритмам использования эллиптических кривых в криптографии можно найти в [14].

Начнем наше изложение с определения эллиптической кривой над конечным полем.

## 4.1 Определение эллиптической кривой

**Определение.** Пусть  $F_q$ ,  $q = p^k$ , конечное поле характеристики  $p \geq 2$ . Эллиптической кривой над полем  $F_q$  называется множество точек  $(x, y) \in F_q \oplus F_q$ , удовлетворяющих уравнению Вейерштрассе

$$y^2 + ay + b = x^3 + cx^2 + dx + e \quad (4.1.1)$$

Кроме того, к множеству точек ЭК добавляется специальная точка, обозначаемая через  $\infty$  и называемая точкой в бесконечности.

Если характеристика поля  $p \geq 3$  (а именно этот случай для нас наиболее интересен), уравнение (4.1.1) может быть преобразовано путем замены переменных в уравнение

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad (4.1.2)$$

где  $a, b \in F_q$ , которое называется *сокращенным* уравнением Вейерштрассе.

Важными параметрами эллиптической кривой являются ее *дискриминант*  $\Delta$  и *инвариант*  $j$ :

$$\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \quad j = \frac{1728(4a)^3}{\Delta}$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то многочлен  $x^3 + ax + b$ , стоящий в правой части уравнения кривой, не имеет кратных корней. Такая кривая называется *неособой*. Мы будем рассматривать только неособые кривые.

На множестве точек  $E$  неособой эллиптической кривой можно определить групповую операцию суммирования  $+$ , с помощью которой это множество становится аддитивной абелевой группой. Нулем этой группы является бесконечно удаленная точка  $\infty$ , а обратным элементом к точке  $P = (x, y) \in E$  будет являться точка  $-P = (x, -y)$ .

Сначала опишем геометрическую интерпретацию операции суммирования. Пусть  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$  – произвольные точки, и  $P_3(x_3, y_3)$  обозначает сумму этих точек  $P_3 = P_1 + P_2$ .

Проведем через точки  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$  прямую  $L$  до пересечения с третьей точкой, которую обозначим через  $P'(x'_3, y'_3)$ . Такая точка обязательно найдется, т.к. пересечение произвольной прямой с кривой  $EC$  имеет либо одну, либо 3 точки пересечения.

Определим сумму трех точек  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  и  $P'_3(x'_3, y'_3)$  равной нулю (бесконечно удаленной точке):

$$P_1 + P_2 + P' = \infty \quad (4.1.3)$$

Тогда  $P_3 = P_1 + P_2 = -P'$ , откуда  $x_3 = x'_3$ ,  $y_3 = -y'_3$ . Для вычисления координат точки  $P_3$ , найдем параметры прямой  $L$ :  $y = \lambda x + d$ :

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad d = y_1 - \lambda x_1 \quad (4.1.4)$$

Подставляя выражение для  $L$  в уравнение (4.1.1), получим

$$x^3 + cx^2 + ax + b - (\lambda x + d)^2 = 0 \quad (4.1.5)$$

Сумма координат  $x_1 + x_2 + x_3$  должна быть равна коэффициенту при  $x^2$ , взятому с противоположным знаком:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 - c = \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - c, \quad (4.1.6)$$

откуда получим формулу для координат суммы:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 - c \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 = \lambda(2x_1 + x_2 - \lambda^2 + c) - y_1 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

где для сокращенного уравнения (4.1.2) значение параметра  $c$  равно 0.

Если точки  $P_1$  и  $P_2$  совпадают, то прямая  $L$  является касательной в т.  $P_1$  и угловой коэффициент прямой  $L$  можно найти, дифференцируя уравнение (4.1.1) по  $x$ . Общие формулы для коэффициента  $\lambda$  получают вид:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \text{если } P_1 \neq P_2, \\ \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} & \text{если } P_1 = P_2 \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Формулы для координат удвоенной точки можно получить из (5.1), подставляя  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1$ :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - 2x_1 - c \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 = \lambda(3x_1 - \lambda^2 + c) - y_1 \end{cases} \quad (4.1.9)$$

где опять для сокращенного уравнения (4.1.2) значение параметра  $s$  равно 0.

Группа точек эллиптической кривой над полем  $F_q$  обозначается символом  $EC(F_q)$ , а ее мощность (количество элементов) символом  $\#EC(F_q)$ .

Известно, что группа точек эллиптической кривой либо является циклической (т.е. найдется точка  $P \in EC$  такая, что все точки являются кратными этой точки), либо  $E(F_q) \cong Z_{n_1} \oplus Z_{n_2}$ , где  $n_1|n_2$ , и  $n_1|q-1$ . Инвариант  $j$  определяет кривую с точностью до изоморфизма: любые две кривые с одинаковым инвариантом являются изоморфными (как абелевы группы).

**Пример.** Пусть  $E(F_q)$  - группа точек кривой  $y^2 = x^3 + x + 1$  над полем  $F_{23}$ . Эта группа является циклической с генератором  $P(0, 1)$ . Рассмотрим все кратные  $kP$  точки  $P$ :

$P(0, 1)$	$2P = (6, -4)$	$3P = (3, -10)$	$4P = (-10, -7)$
$5P = (-5, 3)$	$6P = (7, 11)$	$7P = (11, 3)$	$8P = (5, -4)$
$9P = (-4, -5)$	$10P = (12, 4)$	$11P = (1, -7)$	$12P = (-6, -3)$
$13P = (9, -7)$	$14P = (4, 10)$	$15P = (9, 7)$	$16P = (-6, 3)$
$17P = (1, 7)$	$18P = (12, -4)$	$19P = (-4, 5)$	$20P = (5, 4)$
$21P = (11, -3)$	$22P = (7, -11)$	$23P = (-5, -3)$	$24P = (10, 7)$
$25P = (3, 10)$	$26P = (6, 4)$	$27P = (0, -1)$	$28P = (\infty)$

Таким образом, данная кривая содержит 28 точек.

*Порядок точки*  $A = ord(A)$  — это наименьшее натуральное число  $k$  такое, что  $kA = \infty$ . Поскольку по теореме Лагранжа порядок любой точки является делителем порядка группы, то порядок любой точки на кривой из нашего примера принадлежит множеству  $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ .

**Пример.** Найти сумму точек  $3P = (3, -10)$  и  $7P = (11, 3)$ .

**Решение.** Вычислим  $\lambda = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ :  $y_2 - y_1 = 3 - (-10) = 13$ ,  $x_2 - x_1 = 11 - 3 = 8$ . Поскольку  $8^{-1} \equiv 3 \pmod{23}$ , то  $\lambda = 13/8 = 13 \cdot 3 \pmod{23} = 16$ . Теперь,  $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 = (16^2 - 3 - 11) \pmod{23} = 12$ , а  $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 = 16(3 - 12) - (-10) \pmod{23} = 4$ .

Ответ:  $(3, -10) + (11, 3) = (12, 4)$ .

**Замечание.** При выполнении удвоения точки или вычислении суммы необходимо вычисление обратного элемента в поле  $F_q$ . Эта операция выполняется с помощью обобщенного алгоритма Евклида (см.разд.??).



## Вычисление множества точек эллиптической кривой

Чтобы найти множество точек эллиптической кривой над простым полем  $F_p$ , можно использовать следующий алгоритм:

```
for(int x = 0; x < p; x++){
    int t = x(x2 + a) + b;
    if ((t/p) == -1) continue;

    printf("(x, y) = (%d, %d) x, ±√x )
}
```

В этом цикле выражение  $(t/p)$  используется для обозначения символа Лежандра.

## Вычисление кратного $kQ$ заданной точки $Q$

Поскольку, арифметика эллиптических кривых не содержит прямых формул для вычисления кратного  $kQ$  для заданной точки  $Q(x_1, y_1)$ , то эту операцию выполняют с использованием операций сложения, вычитания и удвоения точки. Для этого надо представить число  $k$  в двоичной системе исчисления  $k = b_t b_{t-1} \dots b_0$ ,  $b_i \in \{0, 1\}$ , потом вычислить все точки  $2Q, 4Q, \dots, 2^t \cdot Q$  и подсчитать сумму тех точек  $2^i \cdot Q$ , для которых  $b_i = 1$ .

**Пример.** Пусть  $k = 13$ . В двоичной системе  $k = 1101_2$ , тогда,  $13Q = 8Q + 4Q + Q$ . Эту же точку можно вычислить как  $16Q - 2Q - Q$ .

Приведем здесь фрагмент процедуры вычисления кратного  $kP$  точки  $P$ , предполагая что процедуры удвоения  $\text{Double}(P)$  и сложения точек  $\text{AddPoints}(P, Q)$  уже определены:

```
long Mult_k(Point P, long k) {
    Point B = P;
    while (k) {
        if (k%2 == 0)
            { k /= 2; B = Double(B); }
        else
            { k--; B = AddPoints(B, P); }
    }
    return B;
}
```

## 4.2 Эллиптические кривые в проективных координатах

Нахождение суммы и кратного точек ЭК требует вычисления обратного элемента в конечном поле. Это трудоемкая операция, требующая использование обобщенного алгоритма Евклида. Можно однако избавиться от частого использования этой операции, если рассматривать уравнение эллиптической кривой в трехмерных проективных координатах. Исходные координаты называются *аффинными*. Точке  $P(x, y)$  в аффинных координатах будет соответствовать класс эквивалентности

$$(X : Y : Z) = \{(kx, ky, k) \mid k \in F_p, k \neq 0\},$$

который соответствует точке в проективных координатах. Выигрыш при использовании проективных координат достигается тем, что при выполнении операций удвоения или суммирования при вычислении  $\lambda$  по формулам (4.1.9) мы ищем обратный элемент, а просто домножаем каждую координату  $(X, Y, Z)$  на этот знаменатель. Уравнение (4.1.2) перепишется в проективных координатах как

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3, \quad (4.2.10)$$

Бесконечно удаленной точки  $\infty$  будет соответствовать класс  $(0, 1, 0)$  проективной плоскости. Если  $P = (X, Y, Z) \neq \infty$ , тогда сопоставляя точке  $P$  точку  $X/Z, Y/Z$ , получим взаимно-однозначное соответствие между точками между точками кривой в аффинных координатах и классами проективной ЭК.

Для получения формул сложения и удвоения точек в проективных координатах подставим в формулы (4.1.2) вместо  $x_1$  и  $y_1$  выражения  $X_1/Z_1$  и  $Y_1/Z_1$  соответственно.

Для формул удвоения получим

$$\begin{cases} \lambda = (3x^2 + a)/2y = (3X^2 + aZ^2)/2Y_1Z_1 = A_1/B_1, \\ x_2 = \lambda^2 - 2X_1/Z_1 = A_1^2/B_1^2 - 2X_1/Z_1 \\ y_2 = \lambda(3X_1/Z_1 - \lambda^2) - Y_1/Z_1 = A_1(3X_1Y_1B_1 - A_1^2)/B_1^3 - Y_1/Z_1 \end{cases} \quad (4.2.11)$$

где  $A_1 = 3X_1^2 + aZ_1^2$ ,  $B_1 = 2Y_1Z_1$ .

Общий знаменатель для координат  $x_2$  и  $y_2$  равен  $B_1^3 = 8Y_1^3Z_1^3$ , поэтому для исключения знаменателя домножим координаты  $x_2$  и  $y_2$  на этот множитель. Получим формулы для вычисления координат удвоенной точки в проективных

координатах, не использующие вычисления обратного элемента:

$$\begin{cases} A_1 = 3X_1^2 + aZ_1^2, & B_1 = 2Y_1Z_1 \\ X_2 = B_1(A_1^2 - 4X_1Y_1B_1) \\ Y_2 = A_1(6X_1Y_1B_1 - A_1^2) - 4Y_1^2B_1^2 \\ Z_2 = B_1^3 \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Выпишем последовательность операций для вычисления координат удвоенной точки и подсчитаем необходимое количество операций умножения и возведения в квадрат элементов поля. Операцию умножения будем обозначать буквой М (от англ. multiplication), а возведение в квадрат буквой S (от англ. squaring). Умножения на небольшую константу и сложения мы не учитываем, поскольку эти операции имеют линейную сложность относительно длины элементов поля в то время, как операции умножения и возведения в квадрат имеют квадратичную сложность относительно длины элементов поля. Операция возведения в квадрат выполняется быстрее, чем операция умножения, и ее сложность составляет примерно от 0,6 до 0,8 от сложности умножения.

Expression	M	S
$A_1 = 3X^2 + aZ^2$	0	2
$B_1 = 2Y_1Z_1$	1	0
$T_1 = Y_1B_1$	1	0
$T_2 = 2X_1T_1$	1	0
$T_3 = A_1^2$	0	1
$X_2 = B_1(T_3 - 2T_2)$	1	0
$T_4 = T_1^2$	0	1
$Y_2 = A_1(3T_2 - T_3) - T_4$	1	0
$Z_2 = B_1^3$	1	1
Всего	6	5

Выполним те же расчеты для суммы точек.

$$\begin{cases} \lambda = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (Y_2Z_1 - Y_1Z_2)/(X_2Z_1 - X_1Z_2) = A/B, \\ x_3 = \lambda^2 - X_1/Z_1 - X_2/Z_2 = A^2/B^2 - (X_1Z_2 + X_2Z_1)/Z_1Z_2 \\ y_3 = A(B^2(2X_1Z_2 + X_2Z_1) - A^2Z_1Z_2)/B^3Z_1Z_2 - Y_1/Z_1 \end{cases}$$

Умножая координаты  $x_3$  и  $y_3$  на общий знаменатель  $B_1^3Z_1Z_2$ , получим форму-

лы для суммы точек в проективных координатах:

$$\begin{cases} A = Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2, & B = X_2 Z_1 - X_1 Z_2, & C = X_2 Z_1 + X_1 Z_2, \\ D = 2X_1 Z_2 + X_2 Z_1, & E = Z_1 Z_2, \\ X_3 = B(A^2 E - B^2 C), \\ Y_3 = A(B^2 D - A^2 E) - Y_1 Z_2 B^3 \\ Z_3 = B^3 E \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Для более эффективного вычисления выполним следующее преобразование. Обозначим  $T_1 = X_1 Z_2$  и  $T_2 = X_2 Z_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} B^2 C &= (T_2 - T_1)^2 (T_2 + T_1) = (T_2 - T_1)^3 + 2T_2 (T_1 - T_2)^2 = B^3 + 2T_2 B^2 \\ B^2 D &= (T_2 - T_1)^2 (T_2 + 2T_1) = (T_1 - T_2)^3 + 3T_2 (T_1 - T_2)^2 = B^3 + 3T_2 B^2 \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{cases} X_3 = B(A^2 E - B^3 - 2B^2 T_2), \\ Y_3 = A(3B^2 T_2 + B^3 - A^2 E) - Y_1 Z_2 B^3 \\ Z_3 = B^3 E \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Выпишем последовательность операций при вычислении суммы точек и оценим количество умножений и возведений в квадрат.

Expression	M	S
$T_0 = Y_1 Z_2, \quad T_1 = X_1 Z_2, \quad T_2 = X_2 Z_1$	3	0
$A = Y_2 Z_1 - T_0, \quad B = T_2 - T_1$	1	0
$A_2 = A^2, \quad B_2 = B^2, \quad B_3 = B^3$	1	2
$T_3 = B_2 T_2, \quad E = Z_1 Z_2,$	2	0
$F = A_2 E - B_3 - 2T_3$	1	0
$X_3 = BF$	1	0
$Y_3 = A(T_3 - F) - T_0 B_3$	2	0
$Z_3 = B_3 E$	1	0
Всего	12	2

Рассмотрим также важный для дальнейшего описания случай смешанного сложения, когда координаты первой точки заданы в проективных координатах, а второй – в аффинных координатах.

$$P + Q = (X_1, Y_1, Z_1) + (x_2, y_2) = (X_3, Y_3, Z_3).$$

$$\begin{cases} T = x_2 Z_1, & A = Y_1 - y_2 Z_1, & B = X_1 - T, \\ A_2 = A^2, & B_2 = B^2, & B_3 = B^3 \\ T_3 = B_2 T, & F = A_2 Z_1 - B_3 - 2T_3, \\ X_3 = BF \\ Y_3 = A(T_3 - F) - B_3 Y_1, \\ Z_3 = B_3 Z_1 \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Стоимость последнего сложения равна  $9M+2S$ . Это на 21,4% меньше, чем стоимость сложения в обычных проективных координатах. Отметим, что при вычислении кратного  $kP$  можно взять исходную точку в аффинных координатах, а вычисления производить, используя формулы для смешанного суммирования. Такое суммирование эффективно, когда множитель  $k$  достаточно велик и операция добавления точки  $P$  при вычислении  $kP$  выполняется многократно. Приведем здесь ссылку на базу данных формул для операций удвоения и сложения для различных представлений эллиптических кривых [5]:

[http:// hyperelliptic.org/EFD](http://hyperelliptic.org/EFD)

### 4.3 Эллиптические кривые в якобиановых проективных координатах

Ускорение операции вычисления кратного точки можно получить, используя проективные якобиановы координаты. Точка в этой системе координат точки является классом

$$(X : Y : Z) = \{(\lambda^2 x, \lambda^3 y, \lambda) \mid \lambda \in F_p\}, \quad (4.3.16)$$

который соответствует аффинной точке  $(X/Z^2, Y/Z^3)$ . Уравнение эллиптической кривой в якобиановых координатах имеет вид

$$Y^2 = X^3 + aXZ^4 + bZ^6 \quad (4.3.17)$$

Приведем сначала формулы для удвоения и сложения точек в якобиановых координатах из презентации П.Лонги и А.Мири ([27]) (см.также [28]).

#### 1. Формулы для удвоения точки в якобиановых координатах

$$P_2(X_2, Y_2) = 2P_1(X_1, Y_1).$$

$$\begin{cases} A = 3X_1^2 + aZ_1^4, & B = 2[(X_1 + Y_1^2)^2 - X_1^2 - Y_1^4], \\ X_2 = A^2 - 2B, \\ Y_2 = A(B - X_3) - 8Y_1^4 \\ Z_2 = (Y_1 + Z_1)^2 - Y_1^2 - Z_1^2, \end{cases} \quad (4.3.18)$$

Стоимость операции удвоения равна  $2M+8S$  (два умножения и 8 возведений в квадрат). Напомним, что аналогичная операция в обычных проективных координатах оценивается в  $6M+5S$ .

#### 2. Формулы для сложения точек в якобиановых координатах

$$P_3(X_3, Y_3) = P_1(X_1, Y_1) + P_2(X_2, Y_2).$$

$$\begin{cases} A = 2(Z_1^3 Y_2 - Z_2^3 Y_1), & B = Z_1^2 X_2 - Z_2^2 X_1 \\ X_3 = A^2 - 4B^2 - 8Z_2^2 X_1 B^2, \\ Y_3 = A(4Z_2^2 X_1 B^2 - X_3) - 8Z_2^3 Y_1 B^3 \\ Z_3 = 2Z_1 Z_2 B \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Стоимость этой операции равна 11M+5S, что немного уступает сложению в обычных проективных координатах (12M+2S). Значительный выигрыш в быстродействии достигается при смешанном сложении, когда первая точка задается в якобиановых координатах, а вторая – в аффинных.

### 3. Формулы для смешанного сложения точек в якобиановых и аффинных координатах

$$P + Q = (X_1, Y_1, Z_1) + (x_2, y_2) = (X_3, Y_3, Z_3).$$

$$\begin{cases} A = Z_1^3 y_2 - Y_1, & B = Z_1^2 x_2 - X_1, \\ X_3 = A^2 - B^3 - 2X_1 B^2 \\ Y_3 = A(X_1 B^2 - X_3) - Y_1 B^3, \\ Z_3 = ((Z_1 + B)^2 - Z_1^2 - B^2)/2. \end{cases} \quad (4.3.20)$$

Стоимость последнего сложения равна 7M+4S. Это на 21,5% меньше, чем стоимость сложения в обычных проективных координатах.

Приведем также формулы для утроения точки, которая может оказаться полезной для вычисления кратных  $kP$  для специальных значений  $k$ , например, для  $k = 3^t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

$P_3 = 3 \times P_1(X_1, Y, Z_1)$ , и стоимость операции = 10M+6S.

$$\begin{cases} A = 3X_1 + aZ^4, & B = 8Y_1^4, & C = 12X_1 Y_1^2 - A^2, & D = BC \\ X_3 = 8Y_1^2(B - D) + X_1^2 C^2, \\ Y_3 = Y_1[4(D - B)(2B - D) - C^3], \\ Z_3 = Z_1 C. \end{cases} \quad (4.3.21)$$

## 4.4 Число точек эллиптической кривой

Одной из трудных проблем, имеющих важное значение для приложений, является проблема вычисления количества точек на эллиптической кривой. Известное неравенство Хассе (Hasse) утверждает, что

$$\#E(F_q) = q + 1 - t, \quad (4.4.22)$$

где  $|t| \leq 2\sqrt{q}$ .

Если выполнено условие  $p \nmid t$ , то кривая называется *суперсингулярной* (*supersingular*), иначе кривая называется *обыкновенной* (*ordinary*). Отметим, что условие  $p \nmid t$  при  $p \geq 5$  эквивалентно условию  $t = 0$ .

Неравенство Хассе вытекает из уравнения

$$\#E(F_q) = p^k + 1 - \sum_{x \in F_{p^k}} \chi(x^3 + ax + b), \quad (4.4.23)$$

где  $\chi(z)$  – квадратичный характер в поле  $F_q$  (иными словами,  $\chi(z) = 1, -1, 0$  в зависимости от того, является  $z$  квадратичным вычетом, квадратичным невычетом или равен 0). Напомним, что квадратичные вычеты можно вычислять с помощью символа Лежандра (см. раздел ??). Однако практически формула (4.4.23) не применима, поскольку выполнение расчетов с ее использованием занимает слишком много времени.

Из неравенства Хассе вытекает, что число точек на эллиптической кривой отличается от мощности поля  $q = p^n$  самое большее на величину  $t$  меньшего порядка  $O(q^{1/2})$ . Однако вычисления в абелевой группе точек эллиптической кривой более громоздкие, чем в конечных полях. А это значит, что для произвольной точки  $G$  вычисление множителя  $k$  такого, что  $G = kP$ , где  $P$  генератор точек кривой, т.е. решение проблемы, аналогичной вычислению дискретного логарифма в конечных полях, решается более трудоемко. Поэтому на группах точек эллиптических кривых можно строить криптографические протоколы типа протокола Диффи-Хеллмана выработки общего секретного ключа, электронной цифровой подписи или шифрования информации, выбирая размерность ключа (определяемую здесь размерностью поля  $F_{p^k}$ ) меньшей длины. Было подсчитано, что длина ключа в 160 бит на эллиптических кривых соответствует ключу длины 1024 бита в методе RSA (см.[72], с.132).

## 4.5 Алгоритм факторизации Ленстры ECF

Будем обращаться к методу Ленстры факторизации на эллиптических кривых, используя аббревиатуру ECF (Elliptic Curves Factorization). Пусть  $n$  – составное число. Этот метод имеет много общего с  $(p-1)$ -методом Полларда, и производительность метода Ленстры зависит только от размера наименьшего делителя  $n$ , а не от размерности  $n$ .

Рассмотрим множество  $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  как основное множество для координат точек эллиптической кривой  $EC(Z_n) : y^2 = x^3 + ax + b$ . В строгом математическом смысле эта кривая не будет эллиптической кривой (Ленстра назвал такую кривую *псевдокривой*), т.к.  $Z_n$  не является полем, и, значит, в нем

не всегда выполнимы операции нахождения обратного элемента, необходимые для нахождения суммы точек кривой. Однако Ленстра заметил, что невозможность вычисления суммы двух точек  $P(x_1, y_1)$  и  $Q(x_2, y_2)$  означает, что разность первых координат  $x_2 - x_1$  должны равняться 0 по модулю одного из делителей  $n$ , тогда, вычисляя наибольший общий делитель Н.О.Д.  $(n, x_2 - x_1)$ , мы легко найдем искомый делитель.

Суть алгоритма Ленстры заключается в выборе на псевдокривой  $EC(Z_n)$  произвольной базовой точки  $P_0$  и домножении ее на всевозможные простые числа и их степени пока не получим

$$kP_0 = \infty \pmod{p}, \quad (4.5.24)$$

где  $p$ —один из делителей  $n$ .

**Замечание 1.** Поскольку, ни один из делителей  $n$  нам заранее не известен, то условие выполнения (4.5.24) невозможно проверить, поэтому признаком успешного завершения работы алгоритма является выполнение условия Н.О.Д.  $(n, C) = d > 1$  при очередном вычислении коэффициента  $\lambda$  в операции удвоения или сложения точек при вычислении очередного кратного  $C$  точки  $P_0$ .

**Замечание 2.** Работа алгоритма состоит из двух стадий, называемых этапом 1 и этапом 2 (stage-one and stage-two). На первом этапе существенную роль играет настраиваемый параметр  $B_1$ , называемый ограничителем 1 этапа (stage-one limit). По сути алгоритм Ленстры является полным аналогом  $(p-1)$ –алгоритма Полларда (см.разд 2.4), где операция возведения в степень простого числа  $p$  заменена операцией домножения точки ЭК на множитель  $p$ . В остальном, организация работы первого и второго этапов может быть выполнена полностью аналогично работе  $(p-1)$ –метода.

## Описание первой стадии алгоритма

I. *Инициализация:*

1. Выберем некоторое значение  $B_1$ , например,  $B_1 = 10000$ .
2. Выберем случайным образом числа  $x, y, a \in [0, n-1]$ .
3. Вычислим  $b = y^2 - x^3 - ax \pmod{n}$  и  $g = \text{Н.О.Д.}(n, 4a^3 + 27b^2)$ . Если  $g = n$ , возвращаемся к п.2. Если  $1 < g < n$ , тогда прекратим вычисление – делитель найден. Иначе, определим кривую  $E : y^2 = x^3 + ax + b$  и базовую точку-генератор  $P_0(x, y)$ .
4. Присвоим изменяемому параметру  $P(x, y)$  начальное значение, равное  $P_0$ .



II. *Вычисление:*

1. Для каждого простого числа  $p < B_1$  найдем наибольшую степень  $r$  такую, что  $p^r < B_1$ . Выполним цикл `for ( $j = 0; j < r; j++$ )  $P = p \cdot P$` , в результате которого точка  $P$  домножится на  $p^r$ . Каждое умножение на  $p$  выполняется с помощью алгоритма нахождения кратного точки, описанного на с.49.

2. Продолжим вычисление до тех пор, пока не будут пройдены все простые числа, меньшие  $B_1$ , или не найдется шаг, на котором выполнится условие Н.О.Д  $(n, P) = d > 1$ .

Если выполнится последнее условие, то искомый делитель  $n$  найден.

Иначе, либо увеличиваем  $B_1$  и повторяем все заново, либо переходим ко второй стадии алгоритма.

## Вторая стадия алгоритма

На второй стадии алгоритма предполагается, что число точек  $\#EC$  на выбранной ЭК имеет лишь один делитель  $q$ , превышающий границу 1-й стадии  $B_1$ .

1. Выберем новую границу  $B_2$ , и выпишем все простые числа из интервала  $[B_1; B_2] : \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ .

2. Будем последовательно вычислять точки  $q_1 \cdot P, q_2 \cdot P, q_3 \cdot P, \dots$  пока не дойдем до границы  $B_2$ , либо не выполнится условие (4.5.24).

Как и в  $(p-1)$ -методе Полларда, чтобы вычислить очередную точку  $q_{i+1}P$  достаточно прибавить к ранее вычисленной точке  $q_iP$  точку  $\delta_i P$ , где  $\delta_i = q_{i+1} - q_i$ . Поскольку простые числа расположены достаточно близко друг к другу, различных точек вида  $\delta_i P$  будем немного. Их можно вычислить заранее и расположить в некотором массиве. Тогда каждое новое вычисление  $S_i = q_i P$  можно выполнить с помощью только одной операции сложения. Однако, чтобы не пройти точки  $q_i P = \infty$ , требуется вычислять Н.О.Д.  $(n, Z_i)$ , где  $Z_i$  есть  $Z$ -координата т.  $q_i P$  для каждого  $i$ , а каждая операция вычисления Н.О.Д. эквивалента нескольким операциям сложения. Поэтому мы рекомендуем на 2-й стадии ввести переменную  $ProdZ$ , первоначально равную 1, а потом на каждом шаге  $i$  выполнять вычисление  $ProdZ = ProdZ \cdot Z_i \pmod n$ , где  $Z_i$  —  $Z$ -координата точки  $q_i P$ . Тогда, проверку Н.О.Д.  $(n, Z_i) \neq 1$  можно заменить проверкой Н.О.Д.  $(n, ProdZ) \neq 1$  и выполнять ее, например, один раз на 100 или более сложений.

Также для ускорения сложения координаты точек  $\delta_i P$  следует представить в аффинных координатах, тогда операция сложения двух точек ЭК потребует 11

умножений элементов  $Z_n$ , а не 14, как при сложении в проективных координатах (см. формулы 4.3.20).

В наиболее простом варианте реализации второй стадии можно вычислить только одну точку  $2P$  и прибавлять ее к точке  $q_1P$  пока не получим требуемое условие (4.5.24).

**Пример 1.** Пусть требуется разложить число  $n = 455\,839$ . Выберем эллиптическую кривую

$$y^2 = x^3 + 5x - 5,$$

точку  $P = (1, 1)$  на ней и постараемся вычислить  $10!P$ .

1. Найдем сначала  $2P$ . Тангенс угла наклона касательной  $\lambda$  в т.  $P$  равен  $\lambda = (3 \cdot 2 + 5)/(2y) = 4$  и координаты  $P_2 = 2P = (x_2, y_2) = (14, -53) \pmod{n}$ .
2. Вычислим далее,  $P_3 = 3(2P) = 3P_2$ . Прямой формулы для вычисления точки  $3P_2$  нет, поэтому придется вычислить сначала  $2P_2$ , затем получить  $3P_2$ , суммируя точки  $2P_2$  и  $P_2$ . Получим  $2P_2 = (259\,851, 116\,255)$ ,  $3P_2 = (195\,045, 123\,227)$ .
3. Продолжая эту процедуру вычислим  $4!P$ , потом  $5!P$  и т.д. При вычислении  $8!P$  знаменатель  $\lambda$  станет равным 599 и вычисление Н.О.Д.  $(n, 599)$  даст значение  $d = 599$ . Отсюда 599 является делителем  $n$ , и деля  $n$  на 599 найдем второй делитель  $n$ :  $455\,839 = 599 \cdot 761$ .

Причина, по которой процесс сошелся при вычислении  $8!P$ , состоит в том, что кривая  $y^2 = x^3 + 5x - 5 \pmod{599}$  содержит  $640 = 27 \cdot 5$  точек. Вторая кривая  $y^2 = x^3 + 5x - 5 \pmod{761}$  содержит  $640 = 27 \cdot 5$  точек. Число  $8!$  делится на 640, но не делится на 777. Поэтому первым появился делитель  $p = 599$ .

## Анализ метода Ленстры

Проведем теперь анализ метода Ленстры и оценим условия, при которых он будет успешно завершен. До сих пор все вычисления проводились по модулю числа  $n$ , однако, если координаты полученных точек вычислять по модулю  $p$ , являющегося делителем  $n$ , тогда условием успешного завершения алгоритма будет, очевидно, условие

$$kP = \infty, \text{ где } k = \prod_{p_i^{a_i} \leq B_1} p_i^{a_i}, \quad (4.5.25)$$

и эллиптическая кривая  $y^2 = x^3 + ax + b$  рассматривается в конечном поле  $F_p$ . Пусть  $l = \#E(F_p)$  число точек этой кривой. По неравенству Хассе  $l \in [p + 1 - 2\sqrt{p}, p + 1 + 2\sqrt{p}]$ . Для любой точки  $Q(x, y)$  выполняется условие  $lQ = \infty$ ,

поэтому, для того, что алгоритм Ленстры успешно завершился, необходимо, чтобы множитель  $k$  в уравнении (4.5.25) делился на порядок кривой  $l$ . Последнее условие будет выполнено, если все делители  $l$  не превышают границы  $B_1$ .

Дадим здесь определение *гладкости* целого числа (smoothness), которое будет широко использоваться в последующих разделах. Пусть  $B$  – некоторое положительное целое число. Произвольное целое число  $x$  называется  $B$  – гладким, если все делители  $x$  по модулю не превышают  $B$ . Например,  $x = 2^5 \cdot 5 \cdot 13^2$  является  $B$ -гладким для любого  $B \geq 13$ .

Это условие гладкости является более слабым, чем требуется в алгоритме Ленстры. Для успешного завершения этого алгоритма *необходимо*, чтобы все делители числа  $l$  вида  $p^r$ , кроме последнего, были меньше границы  $B_1$ , а наибольший делитель  $p^r$  имел степень  $r = 1$  и был меньше границы  $B_2$ . Например, для  $\#EC(F_p) = 2^5 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 233$  границы  $B_1, B_2$  должны удовлетворять условиям  $B_1 \geq 13^2 = 169$ ,  $B_2 \geq 233$ .

Число  $l$ , любой делитель которого вида  $p^r$ , где  $p$  – простое число, меньше границы  $B$ , называется  $B$ –гладкостепенным.

Отметим, что необходимая граница для степеней делителей  $l$  существенно зависит от значения  $\#EC(F_p)$ , которое, в свою очередь, определяется коэффициентами  $a$  и  $b$  кривой. К сожалению, нет никакого регулярного способа выбрать кривую с наименьшим значением максимальной степени делителя  $\#EC(F_p)$ .

**Пример 2.** Рассмотрим простое число  $p = 1007$  и вычислим наименьшие значения границ  $B_1, B_2$  для каждого целого числа  $k$  из интервала  $[1001, 1013]$ , окружающего  $p$ . Получим:

k	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013
$B_1$	7	3	1	4	5	2	1	16	1	5	1	11	1
$B_2$	143	167	1003	251	67	503	1007	16	1009	101	1011	23	1013

Этот пример показывает, что факторизацию числа  $n$ , имеющего в разложении множитель  $p = 1007$ , может выполнить при  $B_1 = B_2 = 16$ , а может потребовать границы  $B_2$ , сравнимой с числом 1007, в зависимости от выбранной кривой. Отметим также, что границу  $B_1$  в большинстве случаев можно взять очень небольшой (наибольшее значение = 16), а граница  $B_2$  почти всегда очень большая.

Поэтому процедуру факторизации на ЭК следует *всегда* выполнять одновременно с несколькими различными кривыми. На сайте <http://alpertron.com.ar/ECM.HTM> приведены оценки для значения параметра  $B_1$  и рекомендуемое число кривых

в зависимости от размерности наименьшего делителя факторизуемого числа  $n$ :

N digits	$B_1$	N curves
15	2000	25
20	11000	90
25	50000	300
30	250000	700
35	$10^6$	1800
40	$3 \cdot 10^6$	5100
45	$11 \cdot 10^6$	10 600
50	$4,3 \cdot 10^7$	19 300
55	$1,1 \cdot 10^8$	49 000
60	$2,6 \cdot 10^8$	124 000
65	$8,5 \cdot 10^8$	210 000
70	$2,9 \cdot 10^9$	340 000

## Оценка эффективности метода эллиптических кривых Ленстры

Пусть наименьший множитель числа  $n$  равен  $p$ . Тогда, время работы алгоритма Ленстры можно оценить величиной

$$\exp\left(\sqrt{2} + o(1)\sqrt{\ln p \ln \ln p}\right), \quad (4.5.26)$$

которая выполняется в случае, если граница  $B_1$  выбрана близко к величине

$$\exp\left(\sqrt{2}/2 + o(1)\sqrt{\ln p \ln \ln p}\right).$$

Поскольку значение множителя  $p$  неизвестно, то выбор значения  $B_1$  выполняется эмпирически, что несколько ухудшает практическую оценку сходимости метода Ленстры. Отметим, что добавление в алгоритм Ленстры второй стадии вычислений сохраняет общую асимптотическую оценку, хотя обеспечивает большой практический прирост скорости сходимости алгоритма.

## 4.6 Рекордные разложения метода ECF

Если сравнивать метод эллиптических кривых с другими методами факторизации, то ECF относится к классу субэкспоненциальных методов факторизации, а, значит, работает быстрее любого метода, упомянутого во второй главе.

Если сравнивать его с методом квадратичного решета QS и методом решета числового поля NFS, то все зависит от размера наименьшего делителя числа

$n$ . Если число  $n$  выбрано по методу RSA как произведение двух простых чисел примерно одинаковой длины, то метод ЕК имеет ту же оценку, что и метод квадратичного решета, но уступает методу решета числового поля.

Однако если  $n$  имеет размерность, превышающую рекордные показатели для методов QS и NFS, (напомним, что последнее рекордное разложение чисел RSA с использованием NFS относится к числу длины 768 бит), то единственная надежда найти делитель  $n$  может быть выполнена только с помощью метода эллиптических кривых.

За последние годы получено много новых рекордных разложений с использованием этого метода (см. сайт <http://www.loria.fr/~zimmerma/records/top50.html>). Самые большие делители, содержащие 73 десятичные цифры, чисел  $2^{1181} - 1$ ,  $2^{1163} - 1$  и  $2^{1237} - 1$  были найдены в 2010 году коллективом авторов, включающим Д.Босты, А.Ленстры, Т.Кляйнъюнга и П.Монтгомери. Б.Додсон нашел в 2011 году делитель, состоящий из 69 десятичных цифр, числа  $2^{1822} + 1$ . Делитель такой же размерности числа  $3^{1443} + 1$  нашел в 2010 году С.Вагстафф.

Классический алгоритм Ленстры 1987 г. завершается в своей первой стадии. Последующие улучшения этого алгоритма, выполненные Монтгомери, Брентом и др., позволили решать задачу факторизации  $n$  даже в случае, если порядок  $l$  содержит более одного множителя, превышающего  $B_1$ . Описание алгоритма Монтгомери для вычисления кратной точки ЭК можно найти в книге Болотова и др. [48], а улучшения Монтгомери к методу Ленстры в статьях [31] и [32]. В следующем параграфе мы рассмотрим метод Монтгомери по книге Крендела и Померанса "Простые числа: вычислительная перспектива" [14].

## 4.7 "Скрученные" кривые и метод Монтгомери

Одним из чрезвычайно полезных понятий в эллиптической факторизации является понятие *скрученной* кривой (см.[14], р.329).

**Определение.** Пусть  $E(F)$  – эллиптическая кривая над полем  $F$ , заданная уравнением Вейерштрассе

$$y^2 = x^3 + Cx^2 + Ax + B,$$

и  $g$  – ненулевой элемент  $F$ , тогда *квадратичным кручением* кривой  $E$  относительно элемента  $g$  называется эллиптическая кривая над полем  $F$ , заданная уравнением

$$gy^2 = x^3 + Cx^2 + Ax + B \quad (4.7.27)$$

Заменой переменных  $X = gx$ ,  $Y = g^2y$ , эта кривая преобразуется к кривой обычного вида

$$Y^2 = X^3 + gCX^2 + g^2AX + g^3B \quad (4.7.28)$$

Будем изучать скрученную кривую, заданную уравнением (4.7.27). Питер Монг-томери предложил рассматривать точки на скрученных кривых с пропущенной координатой  $Y$ . Рассмотрим его идею первоначально для аффинных координат. Пусть  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$  – точки кривой (4.7.27) такие, что  $P_1 \neq \pm P_2$ . Обозначим через  $x_+, x_-$   $x$ -координаты точек  $P_1 + P_2$  и  $P_1 - P_2$  соответственно. Следующая теорема была доказана П. Монгтомери в ([31]) и переформулирована для скрученных координат Кренделом и Померансом ([14], с.329).

**Теорема.** (Монгтомери [31], р.260). Пусть эллиптическая кривая  $EC$  задана уравнением

$$gy^2 = x^3 + Cx^2 + Ax + B, \quad (4.7.29)$$

точки  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  принадлежат  $EC$ , а координаты  $x_+, x_-$  определены как раньше. Тогда при  $x_1 \neq x_2$  выполняется следующая формула

$$x_+ \cdot x_- = \frac{(x_1x_2 - A)^2 - 4B(x_1 + x_2 + C)}{(x_2 - x_1)^2} \quad (4.7.30)$$

При  $x_1 = x_2$  аналогичная формула имеет вид:

$$x_+ = \frac{(x_1^2 - A)^2 - 4B(2x_1 + C)}{4(x_1^3 + Cx_1^2 + Ax_1 + B)} \quad (4.7.31)$$

$$x_+ = \frac{(x_1^2 - A)^2}{4(x_1^3 + Cx_1^2 + Ax_1)}$$

**Доказательство.** Выпишем формулу для выражения  $x_+$ :

$$x_+ = g \cdot \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - C - x_1 - x_2 \quad (4.7.32)$$

Домножим обе части на  $(x_2 - x_1)^2$  и выполним преобразования, исключая  $gy_1^2$  и  $gy_2^2$  с использованием формулы (4.7.29) и приводя подобные члены:

$$\begin{aligned} x_+(x_2 - x_1)^2 &= g(y_2 - y_1)^2 - (C + x_1 + x_2)(x_2 - x_1)^2 = \\ &= -2g \cdot y_1y_2 + x_1x_2(x_1 + x_2 + 2C) + x_1 + x_2 = \frac{g(x_2y_1 - x_1y_2)^2 - B(x_1^2 + x_2^2)}{x_1x_2} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$x_-(x_2 - x_1)^2 = \frac{g(x_2y_1 + x_1y_2)^2 - B(x_1^2 + x_2^2)}{x_1x_2}$$

Перемножая обе формулы и деля результат на  $(x_2 - x_1)^4$ , получим

$$x_+x_- = \frac{(x_1^2 - A)^2 - 4B(x_1 + x_2 + C))}{(x_2 - x_1)^2} \quad (4.7.33)$$

Теорема доказана.

Идея использования формул (4.7.33) состоит в том, что имея координаты точек  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_1 - P_2$  можно вычислить координаты точки  $P_1 + P_2$  быстрее, чем просто вычисляя сумму  $P_1 + P_2$ . При этом координату  $y$  можно не рассматривать, поскольку вычисление формулы для координаты  $x$  не содержат  $y$ .

Для того, чтобы уменьшить число операций инвертирования, надо использовать проективные координаты, однако, координату  $Y$  можно опустить, поскольку координаты  $X$  и  $Z$  могут быть вычислены, без использования  $Y$ . Общие формулы будут иметь вид:

### Формулы Монтгомери в проективных координатах

#### 1. Общий случай $gY^2Z = x^3 + AX^2Z + BXZ^2 + CZ^3$

$$P_1 = (X_1, Y_1, Z_1), P_2 = (X_2, Y_2, Z_2), P_1 + P_2 = (X_+, Y_+, Z_+), P_1 - P_2 = (X_-, Y_-, Z_-)$$

Случай  $P_1 \neq P_2$ .

$$\begin{cases} X_+ = Z_- \cdot ((X_1X_2 - AZ_1Z_2)^2 - 4B(X_1Z_2 + X_2Z_1 + CZ_1Z_2)Z_1Z_2), \\ Z_+ = Z_- \cdot (X_1Z_2 - Z_1X_2)^2. \end{cases} \quad (4.7.34)$$

Случай  $P_1 = P_2$ .

$$\begin{cases} X_+ = (X_1^2 - AZ_1^2)^2 - 4B(2X_1 + CZ_1)Z_1^3, \\ Z_+ = 4Z_1 \cdot (X_1^3 + CX_1^2Z_1 + AX_1Z_1^2 + BZ_1^3). \end{cases} \quad (4.7.35)$$

Подсчитаем количество операций (умножений  $M$  и возведений в квадрат  $S$  в конечном поле), необходимых для вычисления суммы точек и удвоенной точки:

Сложение по Монтгомери: **11M + 2S**

Удвоение по Монтгомери: **10M + 3S**

В этих формулах не учтена операции сложения и умножения на константу 4 которые имеют линейную оценку относительно длины умножаемых чисел.

#### 2. Частные случаи формул Монтгомери

$B = 0$  :

$$\text{Сложение: } \begin{cases} X_+ = Z_- \cdot (X_1X_2 - AZ_1Z_2)^2, \\ Z_+ = Z_- \cdot (X_1Z_2 - Z_1X_2)^2. \end{cases} \quad (4.7.36)$$

$$\text{Удвоение: } \begin{cases} X_+ = (X_1^2 - AZ_1^2)^2, \\ Z_+ = 4X_1Z_1 \cdot (X_1^2 + CX_1Z_1 + AZ_1^2). \end{cases} \quad (4.7.37)$$

Сложение при  $B = 0$ : **7M + 2S**

Удвоение при  $B = 0$ : **4M + 3S**

**C = 0 :**

$$\text{Сложение: } \begin{cases} X_+ = Z_- \cdot ((X_1X_2 - AZ_1Z_2)^2 - 4BZ_1Z_2(X_1Z_2 + X_2Z_1)), \\ Z_+ = Z_- \cdot (X_1Z_2 - Z_1X_2)^2. \end{cases} \quad (4.7.38)$$

$$\text{Удвоение: } \begin{cases} X_+ = (X_1^2 - AZ_1^2)^2, \\ Z_+ = 4X_1Z_1 \cdot (X_1^2 + AZ_1^2 + BZ_1^3). \end{cases} \quad (4.7.39)$$

Сложение при  $C = 0$ : **10M + 2S**

Удвоение при  $C = 0$ : **7M + 3S**

Из приведенных формул видно, что в проективных координатах сокращенные формулы Монтгомери особенно эффективны для операции удвоения при  $B = 0$ .

## Пример метода Монтгомери

Приведем пример вычисления кратного  $13P$  точки  $P$ , взятый из книги Крендела и Померанса ([14], с. 331):

$$13P = (2(2P) + (2P + P)) + 2(2P + P)$$

1.  $2P = \text{doubleh}(P)$ ,
2.  $3P = \text{addh}(2P, P, P)$ ,
3.  $4P = \text{doubleh}(2P)$ ,
4.  $6P = \text{doubleh}(3P)$ ,
5.  $7P = \text{addh}(4P, 3P, P)$ ,
6.  $13P = \text{addh}(7P, 6P, P)$ .

## Процедура вычисления кратного метода Монтгомери

Приведем теперь алгоритм Монтгомери для произвольных точек  $P(X, Z)$  и кратного  $k$ . Предположим, что  $k = (k_B \ k_{B-1} \ k_0)_2$ -двоичное разложение множителя  $k$ :

```
Point Mont_Mlt_k(Point P(X,Z), long k){
//-----
if(k == 0) return O; // Точка в бесконечности.
if(k == 1) return P; // Возвращаем исходную точку P.
```



```

if(k == 2) return doubleh(P);
//-----
Point U=P, T=doubleh(P);
for(j = B - 1; j >= 0; j --){
    if(k_j == 1)
        { U=addh(T, U, P); T=doubleh(T);}
    else
        { T=addh(T, U, P); U=doubleh(T);}
}
return U;
}
//----- End of function -----

```

Последние улучшения в ЕСМ методе связаны с использованием кривых Эдвардса.

## 4.8 Кривые Эдвардса

В некоторых специальных случаях уравнение эллиптической кривой можно преобразовать к более простому виду, позволяющему выполнять операции над точками более эффективно. Кривые такого вида рассматривались еще Гауссом и Эйлером.

Использование этих кривых для криптографии началось после опубликования в 2007 году статьи Эдвардса "A normal form for elliptic curves"[16], в которой он ввел правила сложения точек на таких кривых. Эти формулы использовали существенно меньшее число операций в конечном поле, чем все ранее изучавшиеся представления эллиптических кривых. Даниель Берштейн и Таня Ланге разработали пакет программ *EECM – MPFQ* для быстрой факторизации чисел средних и больших размеров (см. [4], [3], [6]) с использованием кривых Эдвардса. На сайте <http://eescr.cr.yp.to> есть ссылки на исходные коды этого пакета.

**Определение.** Кривой Эдвардса называется кривая над полем  $K$ , задаваемая уравнением

$$x^2 + y^2 = c^2(1 + dx^2y^2) \quad (4.8.40)$$

При  $c = 1$  кривая Эдвардса называется *скрученной кривой Эдвардса*.

Правило сложения точек на кривой Эдвардса в аффинных координатах задается формулой

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \left( \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{1 + dx_1x_2y_1y_2}, \frac{y_1y_2 - x_1x_2}{1 - dx_1x_2y_1y_2} \right) \quad (4.8.41)$$

Замена переменных  $x' = x/c$ ,  $y' = y/c$  приводит к изоморфной кривой, у которой коэффициент  $c = 1$ , поэтому без ограничения общности будем считать в дальнейших расчетах  $c = 1$ .

## Проективные координаты

В проективных координатах кривая Эдвардса имеет вид

$$X^2Z^2 + Y^2Z^2 = Z^4 + dX^2Y^2 \quad (4.8.42)$$

Аффинные координаты точки  $P(x, y)$  связаны точки связаны в проективными  $P(X : Y : Z)$  отображениями

$$(x, y) \rightarrow (x : y : 1), \quad (X : Y : Z) \rightarrow (X/Z, Y/Z)$$

причем бесконечно удаленной точке  $\infty$  соответствует две проективные бесконечно удаленные точки  $(0 : 1 : 0)$  и  $(1 : 0 : 0)$ .

Закон сложения в проективных координатах переписывается в виде

$$\begin{aligned} & (X_1, Y_1, Z_1) + (X_2, Y_2, Z_2) = \\ & = (Z_1Z_2 \cdot (X_1Y_1 + X_2Y_2), Z_1Z_2 \cdot (Y_1Y_2 - X_1X_2), Z_1^2Z_2^2 + dX_1X_2Y_1Y_2) \end{aligned} \quad (4.8.43)$$

Последовательность формул для вычисления суммы может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= Z_1Z_2, & B &= A^2, & C &= X_1X_2, & D &= Y_1Y_2, & E &= dCD, \\ F &= B - E, & G &= B + E, & X_3 &= AF((X_1 + Y_1) \cdot (X_2 + Y_2) - C - D), \\ Y_3 &= AG(D - C), & Z_3 &= cFG. \end{aligned}$$

Число операций составляет  $10\mathbf{M}+1\mathbf{S}$ . Для этого вычисления было использовано равенство

$$x_1y_2 + x_2y_1 = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - x_1x_2 - y_1y_2.$$

## Глава 5

# Отображения Вейля и Тейта

### 5.1 Криптографические протоколы на эллиптических кривых

В этой главе рассмотрим наиболее известные варианты использования эллиптических кривых в криптографии.

#### Протокол Диффи-Хеллмана

Протокол Диффи-Хеллмана используется для генерации двумя удаленными абонентами общего секретного ключа в условиях незащищенного канала связи. Сначала выбирается простое число  $p \approx 2^{160}$  и параметры  $a$  и  $b$  эллиптической кривой. Этим задается эллиптическая кривая  $E_p(a, b)$ . Затем на  $E_p(a, b)$  выбирается генерирующая точка  $G = (x_1, y_1)$ . При выборе т.  $G$  важно, чтобы порядок т.  $G$   $ord(G) = \min\{n \mid nG = \infty\}$  был большим простым числом. Точка  $G$  называется *базовой* точкой. Параметры  $E_p(a, b)$  и координаты базовой точки криптосистемы являются открытыми параметрами, известными всем участникам. Обмен ключами между пользователями Alice и Bob (кратко, А и В) производится по следующей схеме:

1. Участник А выбирает целое число  $k_A < n$ . Это число является закрытым ключом участника А. Затем участник А вычисляет открытый ключ  $P_A = k_A G$ , который представляет собой некоторую точку на  $E_p(a, b)$ .
2. Точно так же участник В выбирает закрытый ключ  $k_B$  и вычисляет открытый ключ – точку на кривой  $P_B = k_B G$ .

3. Участники обмениваются своими открытыми ключами (координатами точек  $P_A$  и  $P_B$ ), после чего вычисляют общую точку  $Q$  эллиптической кривой по следующей схеме:

Участник  $A$  вычисляет  $Q = k_A \cdot P_B = k_A k_B G$ , а участник  $B$  находит ключ по формуле  $Q = k_B \cdot P_A = k_A k_B G$ . Отметим, что поскольку точка на ЭК имеет две координаты, то можно в качестве секретного ключа взять либо только координату  $x$  точки  $Q$ , либо только координату  $y$ , либо сумму координат  $x + y$ .

Возможный противник, зная известные параметры  $k_A$ ,  $k_B$  и  $G$ , не сможет вычислить значение общего ключа, т.к. для этого ему надо решить задачу дискретного логарифмирования на эллиптической кривой (т.е. найти кратное  $k$  по координатам т.  $kG$  и  $G$ ).

## Протокол Диффи-Хеллмана для трех и более участников

Идея алгоритма Диффи-Хеллмана легко может быть обобщена на несколько участников. Приведем пример для случая  $n = 3$ :

1. Каждый из участников  $A$ ,  $B$ , и  $C$  вырабатывает секретный ключ  $k_A$ ,  $k_B$  и  $k_C$  соответственно и вычисляет точки  $P_A = k_A G$ ,  $P_B = k_B G$  и  $P_C = k_C G$ , которые пересылает по циклу  $A$  к  $B$ ,  $B$  к  $C$ ,  $C$  к  $A$ .
2. Далее, участники  $A$ ,  $B$ , и  $C$  вычисляют точки  $Q_A = k_A P_C$ ,  $Q_B = k_B P_A$ ,  $Q_C = k_C P_B$  соответственно и пересылают по тому же циклу.
3. На последнем шаге вычисляется общая точка  $R = k_A k_B k_C G$ , домножением точки, полученной на предыдущем шаге, на соответствующий секретный ключ:

$$R = k_A k_B k_C G = k_A Q_C = k_B Q_A = k_C Q_B$$

*Замечание 1.* Выполнение протокола Диффи-Хеллмана для двух участников требует два обмена данными, для трех – уже шести обменов, а для произвольного  $n$  –  $n!$  обменов данными, что является слишком большим числом при сравнительно небольших  $n$ . Частично эта проблема может быть решена путем использования билинейных или полилинейных отображений типа преобразований Вейля и Тейта, описываемых в следующей главе.

*Замечание 2.* Для суперсингулярных кривых в 1993 году был найден алгоритм Менезеса, Окатамо и Ванстоуна (так называемая MOV-атака) ([29]), основанный на преобразовании Вейля-Тейта, позволяющий свести задачу дискретного логарифмирования на ЭК (ДЛЭК) к задаче дискретного логарифмирования в конечном поле (ДЛКР), где эта задача может быть решена намного эффективнее. Поэтому суперсингулярные кривые перестали использоваться в протоколах построения электронной цифровой подписи ЭЦП и шифрования. Однако в

2000 году А. Джоукс ([23]) нашел замечательные применения преобразованию Вейля-Тейта в криптографии, и на сегодняшний день эта тематика является одной из самых популярных в криптографии. Мы рассмотрим алгоритм Менезеса, Окатамо и Ванстоуна в разделе 5.

## Шифрование сообщений с использованием эллиптических кривых

Рассмотрим самый простой подход к шифрованию/дешифрованию секретных сообщений с использованием эллиптических кривых. Задача состоит в том, чтобы зашифровать сообщение  $M$ , которое может быть представлено в виде точки на эллиптической кривой  $P_m(x, y)$ . Как и в случае обмена ключом, в системе шифрования/дешифрования в качестве параметров рассматривается эллиптическая кривая  $E_p(a, b)$  и базовая точка  $G$  на ней. Участник  $B$  выбирает закрытый ключ  $n_B$ , представляющий собой целое число от 2 до  $n$ , где  $n$ —порядок точки  $G$  и вычисляет открытый ключ  $P_B = n_B \cdot G$ , являющийся точкой на кривой. Участник  $A$  выбирает случайное целое положительное число  $k$  и вычисляет зашифрованное сообщение  $C_m$ , являющееся парой точек на эллиптической кривой:

$$C_m = \{k \cdot G, P_m + k \cdot P_B\}.$$

Чтобы дешифровать сообщение, участник  $B$  вычитает из второй точки произведение первой точки на свой закрытый ключ:

$$P_m + k \cdot P_B - n_B \cdot (k \cdot G) = P_m + k \cdot (n_B \cdot G) - n_B \cdot (k \cdot G) = P_m.$$

Участник  $A$  зашифровал сообщение  $P_m$  добавлением к нему  $kP_B$ . Никто не знает значения  $k$ , поэтому, хотя  $P_B$  и является открытым ключом, никто не знает  $k \cdot P_B$ . Противнику для восстановления сообщения придется вычислить  $k$ , зная  $G$  и  $k \cdot G$ . Сделать это будет нелегко, т.к. надо вычислить дискретный логарифм. Получатель также не знает  $k$ , но ему в качестве подсказки посылается  $k \cdot G$ . Умножив  $k \cdot G$  на свой закрытый ключ, получатель получит значение, которое было добавлено отправителем к незашифрованному сообщению. Тем самым получатель, не зная  $k$ , но имея свой закрытый ключ, может восстановить незашифрованное сообщение.

*Замечание.* Здесь надо еще сказать, как кодировать текстовое сообщение точками кривой. Для этого сообщение разбивается на отдельные символы, и каждый символ заменяется его числовым кодом. Можно использовать какую-нибудь стандартную кодировку типа ASCII или WIN1251 либо просто перенумеровать все буквы последовательными цифрами.

Далее надо каждому коду сопоставить какую-нибудь точку на кривой. Самый простой вариант – это составить таблицу, сопоставив символу с кодом  $k$  координату  $x$  точки  $kG$ . Однако, лишь половина значений  $x$  является, в среднем, координатами точки ЭК. Поэтому, можно выбрать какое-нибудь натуральное число  $k \geq 2$  и выбрать кодом для  $x$  любую точку ЭК  $P(u, v)$ , для которой  $x = \lfloor u/k \rfloor$  (таких точек будет, в среднем,  $\lfloor k/2 \rfloor$ ).

Тогда, зная координаты  $(u, v)$  любой из возможных точек  $P$ , можно восстановить  $x$ , вычисляя целую часть от  $u/k$ .

Другой вариант состоит в том, чтобы использовать эллиптические кривые специального вида, например, кривые вида  $y^2 = x^3 + a \pmod{p}$ , где  $p \equiv 2 \pmod{3}$ . Для таких кривых полином  $z = x^3 + a \pmod{p}$  является перестановкой, поэтому каждый элемент  $0 \leq u < p$  имеет кубический корень в поле  $F_p$ . Тогда, кодовую точку для числа  $y$  можно взять равной точке  $P_y(x, y)$ , имеющей  $y$  в качестве своей ординаты, а  $x$ , найденном из уравнения  $x^3 = y^2 - a$ .

## Построение электронной цифровой подписи с использованием ЭК

Алгоритм ECDSA (Elliptic Curve Digest Signature Algorithm) принят в качестве стандартов ANSI X9F1 и IEEE P1363. Создание ключей:

1. Выбирается эллиптическая кривая  $E_p(a, b)$ . Число точек на ней должно делиться на большое простое число  $n$ .
2. Выбирается базовая точка  $G \in E_p(a, b)$  порядка  $n$ ,  $n \cdot G = \infty$ .
3. Выбирается случайное число  $d \in (1, n)$ .
4. Вычисляется  $Q = d \cdot G$ .
5. Закрытым ключом является  $d$ , открытым ключом - кортеж  $\langle a, b, G, n, Q \rangle$ .

### Создание подписи:

1. Выбирается случайное число  $k \in (1, n)$ .
2. Вычисляется  $k \cdot G = (x_1, y_1)$  и  $r = x_1 \pmod{n}$ .
3. Проверяется условие  $r \neq 0$ , так как иначе подпись не будет зависеть от закрытого ключа. Если  $r = 0$ , то выбирается другое случайное число  $k$ .
4. Вычисляется  $k^{-1} \pmod{n}$ .
5. Вычисляется  $s = k^{-1} \cdot (H(M) + dr) \pmod{n}$ .

6. Проверяется условие  $s \neq 0$ , так как в этом случае необходимого для проверки подписи числа  $s^{-1} \pmod{n}$  не существует. Если  $s = 0$ , то выбирается другое случайное число  $k$ .

Подписью для сообщения  $M$  является пара чисел  $(r, s)$ .

#### Проверка подписи:

1. Проверим, что числа  $r$  и  $s$  принадлежат диапазону чисел  $(1, n)$ . В противном случае результат проверки отрицательный, и подпись отвергается.
2. Вычислить  $w = s^{-1} \pmod{n}$ , и  $H(M)$ ,
3. Вычислить  $u_1 = H(M)w \pmod{n}$ , и  $u_2 = rw \pmod{n}$
4. Вычислить  $u_1P + u_2Q = (x_0, y_0)$ ,  $v = x_0 \pmod{n}$
5. Подпись верна в том и только том случае, когда  $v = r$ .

Дополнительную информацию об использовании эллиптических кривых в криптографии можно найти в книгах [14] и [32].

Широкое использование эллиптических кривых в криптографии основано на том свойстве, что задача дискретного логарифмирования на эллиптических кривых (задача ДЛЭК) является более трудоемкой, чем задача дискретного логарифмирования в конечных полях ДЛКП. Это позволяет использовать ключи меньшей длины по сравнению с ключами методов RSA и Эль-Гамала (160 бит против 1024 бит), что уменьшает требования на вычислительные системы, выполняющие шифрование.

Однако в 1993 году А. Менезес, Т. Окамото и С. Вэнстоун [29] показали, что задача ДЛЭК сводится к задаче ДЛКП в некотором конечном расширении исходного поля  $GF(q)$  эллиптической кривой. Идея сведения основана на спаривании Вейля (Weil's Pairing) по имени выдающегося французского математика Андре Вейля (1906–1998), известного своими трудами в области алгебраической геометрии.

Пусть задано уравнение ЭК  $E : y^2 = x^3 + ax + b$  над полем  $F_q$ ,  $q = p^m$ . Напомним, что алгебраическим замыканием поля  $K$  называется множество корней уравнений с коэффициентами из этого поля (обозначается  $\overline{K}$ ).

Пусть  $n$  — целое положительное число, взаимно-простое с  $p$ . Определим множество  $E[n]$  как множество точек кривой  $E$  порядка  $n$  над алгебраическим замыканием  $\overline{F_q}$  исходного поля  $F_q$ , т.е. множество точек  $P(x, y) \in EC(\overline{F_q})$ , удовлетворяющих  $nP = \infty$ .

Хотя исходное поле  $F_q$  конечно, его замыкание бесконечно. Однако, множество  $E[n]$  содержит конечное число элементов (можно доказать, что оно изоморфно

группе  $\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$ ) и, значит, содержится в некотором конечном расширении  $F_{q^k}$  исходного поля. Степень  $k$  называется *степенью вложения*. Эта степень может быть определена как наименьшее положительное число со свойством  $n \mid (q^k - 1)$ . Определим  $\mu_n$  как множество корней  $n$ -й степени из 1, содержащихся в  $F_{q^k}$ . Отображение Вейля представляет собой билинейное отображение

$$e : E[n] \oplus E[n] \rightarrow \mu_n, \quad (5.1.1)$$

обладающее следующими свойствами:

- (билинейность)  $e(A + B, C) = e(A, C) + e(B, C)$ ,  
 $e(A, B + C) = e(A, B) + e(A, C)$ ,
- $e(P, P) = 1$  для любого  $P \in E[n]$ ,
- (невырожденность)  $(\exists P, Q \in E[n]) e(P, Q) \neq 1$ ,
- (вычислимость)  $e(X, Y)$  может быть эффективно вычислено.

Если степень вложения  $k$  принимает небольшие значения (до  $k = 6$ ), то для поиска ключа шифрования вместо решения задачи ДЛЭК можно решать более легкую задачу вычисления дискретного логарифма в конечном поле размерности  $q^k$ . Таким образом, эллиптические кривые, допускающие вложение в конечные поля с небольшой степенью  $k$ , не могут быть использованы в криптографии. Таковыми, например, являются все суперсингулярные кривые, имеющие степень вложения  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Кривая  $E = EC(GF_{p^r})$  называется *суперсингулярной*, если ее мощность  $\#E = p^r + 1 - t$ , и  $p \mid t$ .

Примером суперсингулярной кривой может служить кривая  $E : y^2 = x^3 + 1 \pmod{p}$ , если характеристика поля  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , тогда  $E$  содержит  $p + 1$  элемент,  $t = 0$  и  $E$  имеет степень вложения, равную 2.

Способ вычисления дискретного логарифма на ЭК, использующий сведение Вейля, получил название MOV-атаки (MOV-attack) по заглавным буквам фамилий изобретателей

Многие протоколы, использующие шифрование и электронные цифровые подписи на эллиптических кривых, специально запрещают использование суперсингулярных кривых. Таким образом, суперсингулярные кривые были изъяты из криптографии.

Однако в 2002 году А.Джоукс [23] нашел неожиданное применение спариванию Вейля и суперсингулярным кривым для построения однораундового протокола выработки общего секретного ключа на основе метода Диффи-Хеллмана. Далее



были найдены и другие, не менее интересные приложения такие, как, например, построение открытого ключа пользователя на основе его общеизвестных идентификационных данных таких, как, например, имя или адрес электронной почты (identity based open keys) (см. Advances in Elliptic Curve [?]).

## 5.2 Вычисление кратного точки ЭК с помощью MOV–алгоритма

Описание этого алгоритма можно найти в главе 5 книги Л. Вашингтона [39]. Пусть заданы эллиптическая кривая  $EC : y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p^r}$ , и точки  $P, Q \in EC$  порядка  $n$ , где  $n$ –простое число, причем существует  $m$  такое, что  $Q = mP$ . Требуется найти множитель  $m$ . Отображение Вейля будем обозначать через  $e(X, Y)$ . Алгоритм вычисления  $m$  заключается в следующем:

1. Находим случайную точку  $T \in EC(F_{q^k})$ .
2. Находим порядок  $M$  точки  $T$ .
3. Находим  $d = \text{Н.О.Д.}(n, M)$ . Если  $d = 1$ , то возвращаемся к п.1. Иначе, перейдем к следующему пункту. Определим, что в этом случае  $T$  имеет порядок  $n$ .
4. Вычислим  $a = e(P, T)$  и  $c = e(Q, T)$ .
5. Вычисляя дискретный логарифм в поле  $F_{q^k}$ , найдем искомый множитель  $m$ .

Отметим, что можно выполнять этот алгоритм с составным  $n$ , тогда число  $d$  может оказаться собственным делителем  $n$  и найденный множитель окажется равным  $m \bmod d$ . В этом случае можно повторять вычисление с различными точками  $T_i$ , вычисляя  $m_i = m \bmod d_i$  до тех пор, пока произведение различных  $d_i$  не станет больше или равно  $n$ . После этого можно найти  $m$  с помощью китайской теоремы об остатках.

**Замечание.** Если речь идет о произвольной точке  $Q$ , то прежде, чем вычислять дискретный логарифм, полезно знать, найдется ли такое  $m$ , что  $Q = mP$ . Эту проверку можно выполнить, используя следующее утверждение:

**Теорема 5.2.1** Для произвольной  $m, Q \in EC(F_{q^k})$  найдется число  $m$  такое, что  $Q = mP$  в том и только в том случае, если выполняются два условия:

1.  $nQ = \infty$ ,
2.  $e(P, Q) = 1$ .

### 5.3 Дивизоры

Построение отображения Вейля и родственного ему отображения Тейта основано на теории дивизоров (делителей) алгебраических кривых, разработанной Андре Вейлем. Приведем здесь основные сведения из этой теории. Более подробный материал можно найти в книге Л. Вашингтона [39].

Идея понятия дивизора основано на том наблюдении, что коэффициенты любого полинома можно вычислить с точностью до ненулевого множителя, зная корни этого многочлена и их кратность. Действительно, если многочлен  $P(x)$  имеет своими корнями кратности  $r_i$  элементы  $x_i$ , то

$$P(x) = a \cdot \prod (x - x_i)^{r_i}.$$

В нашем случае класс изучаемых функций состоит из дробно-рациональных функций над эллиптическими кривыми, т.е. отношений двух многочленов от двух переменных  $x$  и  $y$ , определенных на точках некоторой эллиптической кривой.

Пусть теперь  $E : y^2 = x^3 + ax + b$  — эллиптическая кривая над полем  $K$ , а  $f(x, y) : E \rightarrow K$  — дробно-рациональная функция. Если  $f$  — не константа, то существует не более конечного числа точек  $P \in E$ , в которых  $f(P) = 0$  или  $f(P) = \infty$ . Точки первого вида называются *нулями функции  $f$* , а второго — *полюсами  $f$* .

С точностью до ненулевого множителя функцию  $f$  можно задать, перечисляя все ее нули и полюсы и задавая их кратность. Если  $f$  имеет нуль (полюс) кратности  $k$  в точке  $P$ , то  $f$  можно представить в виде произведения  $f = u_P^k \cdot g$ , где  $u_P$  имеет в точке  $P$  нуль (полюс) первого порядка, а  $g(P) \neq 0, \neq \infty$ . Функция  $u_P$  называется *униформизатором* функции  $f$  в точке  $P$ .

**Пример.** Рассмотрим кривую  $y^2 = x^3 - x$  и функцию  $f(x, y) = x/y$ . Перепишем  $f$  в виде

$$f(x, y) = \frac{x}{y} = \frac{xy}{y^2} = \frac{xy}{x^3 - x} = \frac{y}{x^2 - 1} = y \cdot \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Из последнего представления видим, что точка  $P(0, 0)$  является нулем 1-о порядка функции  $f(x, y) = x/y$ , а функция  $u(x, y) = y$  ее униформизатором в точке  $P(0, 0)$ .

Пусть  $M_1$  — множество нулей, а  $M_2$  — множество полюсов функции  $f(x, y)$ . Сопоставим функции  $f$  формальное выражение

$$f(x, y) \sim \sum_{P \in M_1} r_P [P] - \sum_{P \in M_2} r_P [P], \quad (5.3.2)$$

где  $r_P$  — кратность нуля (полюса)  $P$ .

**Определение 5.3.1** Пусть  $E: y^2 = x^3 + ax + b$  – эллиптическая кривая над полем  $k$ . Дивизором  $D$  над кривой  $E$  называется формальная сумма вида

$$D = \sum_{P \in E} r_P [P],$$

в которой коэффициенты  $r_P$  – целые числа (положительные или отрицательные) и число слагаемых с ненулевым коэффициентом  $r_P$  – конечно.

Множество точек  $P$ , для которых  $r_P \neq 0$ , называется носителем (support) дивизора  $D$  и обозначается  $\text{supp}(D)$ . Целое число  $k = \sum r_P$ ,  $P \in \text{supp}(D)$ , называется степенью  $D$  и обозначается  $\deg(D)$ . Точка эллиптической кривой, равная  $\sum_{P \in E} r_P \cdot P$ , называется суммой дивизора  $D$  и обозначается  $\text{sum}(D)$ .

Сумма дивизоров определяется естественным образом. Множество дивизоров эллиптической кривой образует аддитивную группу относительно операции сложения, а нулем является дивизор, у которого все коэффициенты равны 0. В группе дивизоров наиболее важную роль играют дивизоры функций, которые называются главными дивизорами (principal divisors).

Вычислим дивизор прямой  $l: ax + by + c$ , проходящей через две заданные точки  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$  эллиптической кривой  $E$ . Если  $l$  не является касательной в т.  $P_1$  и  $P_2$ , то она пересекает  $E$  и в третьей т.  $P_3(x_3, y_3)$ , а также в бесконечно удаленной точке  $\infty$ . В точках  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  прямая  $l$  имеет нули 1 порядка, а в т.  $\infty$  – полюс 3 порядка. Чтобы увидеть это, перепишем уравнение ЭК  $y^2 = x^3 + Ax + B$  в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = x^{-1} \left(1 + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3}\right)^{-1}, \quad (5.3.3)$$

откуда

$$x^{-1} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3}\right). \quad (5.3.4)$$

Из уравнения (5.3.3) следует, что  $x/y$  обращается в 0 в т.  $\infty$ , а уравнение (5.3.4) показывает, что функция  $x/y$  является униформизатором  $x^{-1}$  в т.  $\infty$  и т.  $\infty$  является нулем второго порядка для  $x^{-1}$ . Значит т.  $\infty$  является полюсом 2 порядка для  $x$ . Так как  $y = x \cdot (y/x)$ , то т.  $\infty$  является полюсом 3 порядка для  $y$  и для функции  $l = Ax + By + C$ . Отсюда дивизор прямой  $l$  имеет вид

$$\text{div}(l_{P_1, P_2}) = 1[P_1] + 1[P_2] + 1[P_3] - 3[\infty]. \quad (5.3.5)$$

Проведем через т.  $P_3$  вертикальную прямую  $v = x - x_3$ . Она проходит через т.  $P_3(x_3, y_3)$ ,  $-P_3(x_3, -y_3)$  и т.  $\infty$ , а ее дивизор имеет вид

$$\text{div}(v_{P_3}) = 1[P_3] + 1[-P_3] - 2[\infty]. \quad (5.3.6)$$

Из формул (5.3.5) и (5.3.6) получим

$$\operatorname{div} \left( \frac{Ax + By + C}{x - x_3} \right) = \operatorname{div}(Ax + By + C) - \operatorname{div}(x - x_3) = [P_1] + [P_2] - [-P_3] - [\infty].$$

Так как  $P_1 + P_2 = -P_3$  на кривой  $E$ , то последнюю формулу можно переписать в виде

$$[P_1] + [P_2] = [P_1 + P_2] + [\infty] + \operatorname{div} \left( \frac{Ax + By + C}{x - x_3} \right). \quad (5.3.7)$$

Из формул (5.3.5) и (5.3.6) можно видеть, что согласно определению 5.3.1 степени прямых  $l_{P_1, P_2}$  и  $v_{P_3}$  равны 0, а их сумма равна  $\infty$ , что является примером общего факта, выражаемого следующей теоремой:

**Теорема 5.3.1** *Дивизор  $D$  эллиптической кривой  $E$ , имеющий степень 0, является дивизором некоторой функции тогда и только тогда, когда  $\operatorname{sum}(D) = \infty$ .*

### Пример нахождения функции по заданному дивизору

Формула (5.3.7) дает способ нахождения функции  $f$  для заданного дивизора  $D$ , удовлетворяющего теореме 5.3.1. Вычислим функцию  $f$  на ЭК  $E : y^2 = x^3 + 4x \pmod{11}$ , дивизор которой имеет вид

$$D = [(0, 0)] + [(2, 4)] + [(4, 5)] + [(6, 3)] - 4[\infty].$$

Прямая  $l$ , проходящая через т.  $(0, 0)$  и  $(2, 4)$  имеет вид  $l = y - 2x$ , причем т.  $(2, 4)$  является нулем 2 порядка, откуда

$$\operatorname{div}(y - 2x) = [(0, 0)] + 2[(2, 4)] - 3[\infty].$$

Вертикальная прямая через т.  $(2, 4)$  имеет вид  $v = x - 2$  и

$$\operatorname{div}(x - 2) = [(2, 4)] + [(2, -4)] - 2[\infty].$$

Значит,

$$[(0, 0)] + [(2, 4)] = [(2, -4)] + [\infty] + \operatorname{div} \left( \frac{y - 2x}{x - 2} \right).$$

Аналогично,

$$[(4, 5)] + [(6, 3)] = [(2, 4)] + [\infty] + \operatorname{div} \left( \frac{y + x + 2}{x - 2} \right),$$

откуда

$$D = [(2, -4)] + \operatorname{div} \left( \frac{y - 2x}{x - 2} \right) + [(2, 4)] + \operatorname{div} \left( \frac{y + x + 2}{x - 2} \right) - 2[\infty].$$

Поскольку  $[(2, -4)] + [(2, 4)] = \operatorname{div}(x - 2) + 2[\infty]$ , то получим

$$\begin{aligned} D &= \operatorname{div}(x - 2) + \operatorname{div} \left( \frac{y - 2x}{x - 2} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{y + x + 2}{x - 2} \right) = \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{(y - 2x)(y + x + 2)}{x - 2} \right). \end{aligned}$$

Если раскрыть скобки в числителе и заменить слагаемое  $y^2$  на  $x^3 + 4x$ , то вынося  $x - 2$  за скобки, получим  $(y - 2x)(y + x + 2) = (x - 2)(x^2 - y)$ , откуда

$$D = \operatorname{div}(x^2 - y).$$

## Функции от дивизоров

Отображение, задаваемое формулой (5.3.9), является групповым гомоморфизмом из аддитивной группы дивизоров в мультипликативную группу поля  $K$ , т.к.

$$f(D_1 + D_2) = f(D_1) \cdot f(D_2), \quad f(D_1 - D_2) = \frac{f(D_1)}{f(D_2)}. \quad (5.3.8)$$

Распространяя формулы (5.3.8) на произвольные дивизоры, получим формулу

$$f\left(\sum kP\right) = \prod f(P)^k. \quad (5.3.9)$$

Следующая теорема носит название закона взаимности Вейля (Weil reciprocity).

**Теорема 5.3.2** *Если  $f$  и  $g$  — функции на эллиптической кривой такие, что  $\operatorname{div}(f)$  и  $\operatorname{div}(g)$  не имеют общих точек, тогда выполняется следующая формула:*

$$f(\operatorname{div}(g)) = g(\operatorname{div}(f)).$$

## 5.4 Определение отображений Вейля и Тейта

Дадим в этом разделе точные определения отображений Вейля и Тейта (Weil' and Tate' Pairings). Пусть  $E : y^2 = x^3 + ax + b$  — эллиптическая кривая

над алгебраически замкнутым полем  $K$ ,  $n$ –положительное целое число и  $E[n]$  – подгруппа точек кривой  $E$  порядка  $n$ :

$$E[n] = \{P \in E \mid n \cdot P = \infty\}.$$

Пусть  $t.P \in E[n]$ . Рассмотрим дивизор  $D = n[T] - n[\infty]$ . Его степень равна 0, а сумма  $\infty$ . По теореме 5.3.1 найдется функция  $f_P$ , дивизор которой равен  $D$ :

$$\operatorname{div}(f_P) = n[P] - n[\infty]. \quad (5.4.10)$$

Будем называть функцию  $f_P$ , удовлетворяющую (5.4.10), функцией Вейля. Пусть  $t.Q \in E[n]$  не принадлежит орбите  $t.P$ , т.е. не совпадает ни с каким кратным  $kP$ ,  $k \leq n$ , точки  $T$ . Рассмотрим дивизоры

$$D_Q = [Q] - [\infty], \quad D_P = [P + R] - [R], \quad (5.4.11)$$

где  $R$ –произвольно выбранная точка.

**Определение 5.4.1** *Отображение (спаривание) Вейля – это билинейное отображение*

$$e_n : E[n] \times E[n] \rightarrow \mu_n, \quad (5.4.12)$$

где  $\mu_n$ –подгруппа по умножению корней  $n$ -й степени из 1 поля  $K$ , задаваемое следующей формулой:

$$e_n(P, Q) = \frac{f_P(D_Q)}{f_Q(D_P)} \quad (5.4.13)$$

Используя формулы (5.3.8), можно переписать (5.4.13) в виде

$$e_n(P, Q) = \frac{f_P(R) \cdot f_Q(R)}{f_P(\infty) \cdot f_Q(P + R)}. \quad (5.4.14)$$

Можно доказать, что преобразование Вейля не зависит от выбора  $t.R$ , поэтому в определении (5.4.11) в качестве  $R$  можно взять любую точку ЭК. В книге Л.Вашингтона ([39]) отображение Вейля задается обратным отображением по отношению к формуле (5.4.11), полученным при перестановке местами аргументов  $P$  и  $Q$ . Это не влияет на свойства этого преобразования. Рассмотрим пример вычисления отображения Вейля.

**Пример.** Пусть  $EC$ –эллиптическая кривая над полем  $F_7$ , заданная уравнением

$$EC : y^2 = x^3 + 2.$$

Множество  $E[3]$  содержит 9 точек, и  $E[3] \simeq \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$ . Вычислим  $e_3((0, 3), (5, 1))$ . Определим  $P = (0, 3)$ ,  $Q = (5, 1)$  и  $R = (6, 1)$ . Тогда  $D_P = [(0, 3)] - [\infty]$ ,  $D_Q = [(5, 1) + (6, 1)] - [(6, 1)] = [(3, 6)] - [(6, 1)]$ . Также как и в предыдущем разделе, найдем функцию Вейля (5.4.10) для точек  $P$  и  $Q$ :

$$f_{(0,3)} = y - 3, \quad f_{(5,1)} = \frac{4x - y + 1}{5x - y - 1}.$$

Далее

$$f_{(0,3)}(D_Q) = \frac{f_{(0,3)}(3, 6)}{f_{(0,3)}(6, 1)} = \frac{6 - 3}{1 - 3} \equiv 2 \pmod{7}.$$

Аналогично,

$$f_Q(D_P) = 4,$$

где учтено  $f_Q(\infty) = 1$  (см. [39], с.360). Отсюда

$$e_3((5, 1), (0, 3)) = \frac{2}{4} \equiv 4 \pmod{7}.$$

Отметим, что 4 является кубическим корнем из 1, т.к.  $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ .

## Определение отображения Тейта

Определим далее отображение Тейта. Первым аргументом преобразования Тейта по-прежнему является произвольная т.  $P \in E[n]$ . Обозначим через  $nE$  множество точек  $\{nT \mid T \in E\}$ , а через  $E/nE$  множество классов эквивалентности кривой  $E$  по множеству  $nE$ .

**Определение 5.4.2** *Отображение (спаривание) Тейта – это билинейное отображение*

$$\tau_n : E[n] \times E/E[n] \rightarrow \mathbf{F}_{q^k}^* \times \mathbf{F}_{q^k}^* \setminus \mu_n, \quad (5.4.15)$$

где  $\mu_n$  – подгруппа по умножению корней  $n$ -й степени из 1 поля  $F_{q^k}$ , задаваемое следующей формулой:

$$\tau_n(P, Q) = \frac{f_P(Q + R)}{f_P(R)}, \quad (5.4.16)$$

где  $R \notin \{P, -Q, P - Q, \infty\}$ .

Одним из важных отличий отображение Тейта от преобразования Вейля является то, что оно не вырождено (не равно 1) при  $P = Q$ . Это позволяет вычислить множитель  $m$  такой, что  $Q = mP$  за одно вычисление. Действительно,

$$\tau(P, Q) = \tau(P, mP) = \tau(P, P)^m = b \pmod{q}.$$

Чтобы найти теперь  $m$ , достаточно вычислить дискретный логарифм  $\log_a b \pmod{q}$ , где  $a = \tau(P, P)$ , в поле  $K = F_q$ .

Отметим, что значение преобразования Тейта  $\tau(P, Q)$  определяется точками  $P$  и  $Q$  не однозначно, а с точностью до множителя из группы  $\mu_n$ . Чтобы получить уникальное значение, элемент  $\tau(P, Q)$  возводят в степень  $(q^k - 1)/n$ . Обозначим эту функцию через  $\tau^*$ :

$$\tau^*(P, Q) = \tau(P, Q)^{(q^k - 1)/n}. \quad (5.4.17)$$

## 5.5 Алгоритм Миллера

Главной проблемой в вычислении преобразований Вейля и Тейта является нахождение функции  $f$ , дивизор которой совпадает с заданным дивизором  $D$ . Пусть  $t.P \in E[n]$ . В этом разделе будем обозначать функцию Вейля (5.4.10) с дивизором  $n[P] - n[\infty]$  через  $f_{n,P}$ , подчеркивая ее зависимость от порядка  $n$  т.  $P$ . Определим вспомогательные дивизоры

$$D_j = j[S + R] - j[R] - [jS] + [\infty],$$

которые удовлетворяют условиям теоремы (5.3.1). Обозначим через  $f_{j,P}$  функцию, дивизор которой равен  $D_j$ . Эти функции называются функциями Миллера.

Функцию Вейля  $f_{n,P}(Q)$  можно вычислить с помощью рекурсивного алгоритма Миллера, основанного на вычислении промежуточных функций Миллера  $f_{j,P}(Q)$  для  $j < n$  по следующей формуле:

$$f_{1,P}(Q) = 1 \text{ для любой } t.Q \in E(K),$$

$$f_{i+j,P}(Q) = f_{i,P}(Q) \cdot f_{j,P}(Q) \cdot \frac{l_{i,j}}{v_{i+j}} \Big|_Q, \quad (5.5.18)$$

где  $l_{i,j} = Ax + By + C$  — уравнение прямой, проходящей через т.  $iP$  и  $jP$ ,  $v_{i+j} = x - x_0$  — уравнение вертикальной прямой, проходящей через т.  $R = (i + j)P$ .

Приведем формулы для вычисления коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  прямой  $l_{P,Q}$ , проходящей через т.  $P(x_1, y_1)$  и  $Q(x_2, y_2)$ :



1.  $P = Q$ . Угловой коэффициент  $\lambda$  наклона касательной равен

$$\lambda = (3x_1^2 + a)/(2y_1) \pmod{p}. \quad (5.5.19)$$

2.  $P \neq Q$ . Угловой коэффициент  $\lambda$  равен в этом случае

$$\lambda = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \pmod{p}. \quad (5.5.20)$$

В обоих случаях уравнение прямой, проходящей через точку  $P(x_1, y_1)$  и имеющей коэффициент наклона  $\lambda$ , имеет вид  $y - y_1 = \lambda \cdot (x - x_1)$ , откуда получим уравнение  $l$ :

$$l = y - \lambda x + (\lambda x_1 - y_1). \quad (5.5.21)$$

Последними выпишем формулы для вычисления координат суммы точек  $P + Q = (x_3, y_3)$  (формулы для удвоенной точки можно получить, приравняв  $x_2 = x_1$ ):

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 = -y_1 + \lambda(x_1 - x_3). \end{cases} \quad (5.5.22)$$

### Алгоритм Миллера вычисления функции Вейля $f_{P,n}$

1. Найдем бинарное представление числа  $n = (n_t \dots n_0)_2$ .
2. Определим исходные значения переменной точки  $Z$  и функции  $f$  равными  $P$  и 1 соответственно.
3. Выполняем цикл по  $i$  от  $i = t - 1$  до  $i = 0$ :

- Установим

$$\begin{aligned} f &= f^2 \cdot l_{Z,Z}/v_{2Z}, \\ Z &= 2Z. \end{aligned}$$

- Если  $n_i = 1$ , тогда выполним операцию сложения  $P + Z$ :

$$\begin{aligned} f &= f^2 \cdot l_{P,Z}/v_{P+Z}, \\ Z &= P + Z. \end{aligned}$$

4. Определим выходное значение функции Вейля  $f_{P,n} = f$ .

**Пример 1.** Дана кривая  $y^2 = x^3 + 11$  над полем  $F_{31}$ . Она содержит 25 точек и изоморфна группе  $\mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5$ . Эта группа порождается точками  $P = (2; 9)$  и

$Q = (3; 10)$ , имеющими порядок  $n = 5$ . Степень вложения  $k = 1$ , т.к.  $p^1 - 1 = 30$  делится на  $n = 5$ . Вычислим функцию Вейля  $f_{5,P}$ , используя алгоритм Миллера:

1. Найдем двоичное представление  $n = 5 = (101)_2$ ,  $t = 2$ .

2. Положим  $Z = (2; 9)$ . Выполним вычисления шага 3 алгоритма Миллера при  $i = t - 1 = 1$ .

$$\begin{aligned}\lambda &= 3 \cdot 2^2 / (2 \cdot 9) \bmod 31 = 2/3 \bmod 31 = 2 \cdot 21 \bmod 31 = 11. \\ l &= y - \lambda x + (\lambda x_1 - y_1) = y - 11x + 11 \cdot 2 - 9 = y - 11x + 13. \\ Z &= 2Z = (\lambda^2 - 2x_1; -y_1 - \lambda(x_2 - x_1)) = (24; 28) \\ v &= x - 24 \equiv x + 7. \\ f_{2,P} &= (-11x + y + 13)/(x + 7).\end{aligned}$$

Проверим условие  $n_i = 1$ . Т.к.  $n_i = 0$ , то операция сложения на  $i$ -м шаге не выполняется. Переходим к следующей итерации при  $i = 0$ .

3.  $Z = (24, 28)$ . Выполним операцию удвоения т.  $Z$ :  $\lambda = 22$ ,  $l_{2,2} = 9x + y + 4$ ,  $2Z = (2; 22)$ ,  $v_4 = x - 2$ . Отсюда

$$f_{4,P} = f_{2,P}^2 \cdot \frac{9x + y + 4}{x - 2} = \frac{(-11x + y + 13)^2(9x + y + 4)}{(x + 7)^2(x - 2)}$$

Т.к.  $n_i = 1$ , то выполняем вторую часть шага 3 алгоритма Миллера. Это вычисление приводит к т.  $5P = \infty$  и  $l = x - 2$ ,  $v = 1$ , откуда

$$f_{5,P} = f_{4,P} \cdot (x - 2) = \frac{(-11x + y + 13)^2(9x + y + 4)}{(x + 7)^2}$$

Вычислим значение преобразования Тейта  $\tau(P, Q)$ , взяв  $Q = (3; 10)$ . Для этого потребуется вспомогательная точка  $R$ . Возьмем, например,  $R = Q$ . Вычислим сумму  $S = 2Q = (-1; 14)$ . Вычислим функцию Вейля в точках  $S$  и  $R$ :

$$f(S) = f(-1; 14) = 20, \quad f(Q) = f(3; 10) = 10. \quad \tau(P, Q) = 20/10 \pmod{31} = 2.$$

Снова вычислим значение преобразования Тейта  $\tau(P, Q)$ , взяв  $R = 2Q$ . Возьмем, например,  $R = 2Q = (-1; 14)$ . Вычислим сумму  $S = 2Q + Q = (-1, 17)$ . Тогда

$$f(S) = f(-1; 17) = 23, \quad f(2Q) = 20. \quad \tau(P, Q) = 23/20 = 12 \pmod{31} = 2.$$

Мы видим, что значение преобразования Тейта зависит от выбора точки  $R$ . Для получения уникального значения необходимо полученное значение возвести в степень  $(q^k - 1)/n$ . В нашем примере оно равно  $(31 - 1)/5 = 6$ . Имеем,

$$2^6 \pmod{31} = 2, \quad 12^6 \pmod{31} = 2.$$

**Пример 2.** Даны две точки  $P = (2; 9)$  и  $xP = (24; 3)$ . Найти кратное  $x$  на эллиптической кривой  $y^2 = x^3 + 11 \pmod{31}$  из предыдущего примера.

**Решение.** Определим функцию  $f_{P,5}$  так же, как в предыдущем примере. Вычислим  $\tau(P, P)$ , взяв  $R = (15, 10)$ :

$$S = P + R = (2; 9) + (15, 10) = (3, 10), \quad f_{P,5}(S) = 30, \quad f_{P,5}(R) = 7,$$

$$\tau(P, P) = 30/7 \equiv 22 \pmod{31}, \quad a = \tau_{un}(P, P) = 22^6 \equiv 8 \pmod{31}.$$

Вычислим  $\tau(P, xP)$ , взяв по-прежнему  $R = (15, 10)$ :

$$S' = xP + R = (24; 3) + (15, 10) = (6, 14), \quad f_{P,5}(S') = 29,$$

$$\tau(P, xP) = 29/7 \equiv 13 \pmod{31}, \quad b = \tau_{un}(P, xP) = 13^6 \equiv 16 \pmod{31}.$$

Теперь для нахождения  $x$  надо вычислить  $x = \log_a b \pmod{p} = \log_8 16 \pmod{31}$ . Найдём  $x$  простым перебором:

$$8^2 \pmod{31} = 2, \quad 8^3 \pmod{31} = 16, \quad \text{значит } x = 3.$$

## 5.6 "Перемешивающий" эндоморфизм эллиптической кривой

При вычислении значений преобразования Вейля и Тейта возникает вспомогательная задача вычисления по заданной точке  $P$  эллиптической кривой точки  $Q$  линейно не зависящую от  $P$ . Эту операцию удобно выполнять, используя перемешивающий изоморфизм (a distortion map) множества точек кривой, который представляет собой эндоморфизм  $\phi(P)$  кривой  $E$ , переводящий точку  $P$  в точку  $Q$ , не совпадающую ни с какой кратной  $mP$  точки  $P$  (см. Verheul, [?]). Верховил показал, что нетривиальные перемешивающие отображения существуют почти для всех суперсингулярных кривых. В следующей таблице мы дадим описание перемешивающих эндоморфизмов для основных классов суперсингулярных эллиптических кривых.

Поле	Кривая	Отображение	Условия	$Ord(EC)$
$F_p$	$y^2 = x^3 + ax$	$(x, y) \rightarrow (-x, iy)$ $i^2 = -1$	$p \equiv 3 \pmod{4}$	$p + 1$
$F_p$	$y^2 = x^3 + b$	$(x, y) \rightarrow (\eta x, y)$ $\eta^3 = 1, \eta \neq 1$	$p \equiv 2 \pmod{3}$	$p + 1$
$F_{p^2}$	$y^2 = x^3 + b,$ $b \notin F_p$	$(x, y) \rightarrow (\omega \frac{x^p}{r^{(2p-1)/3}}, \frac{y^p}{r^{p-1}}),$ $r^2 = b, r \in F_{p^2}$ $\omega^3 = r, r \in F_{p^6}$	$p \equiv 2 \pmod{3}$	$p^2 - p + 1$

Например, кривая  $E : y^2 = x^3 + 3x \pmod{11}$  принадлежит к классу, описанному в первой строке таблицы, и перемешивающий эндоморфизм имеет вид  $(x, y) \rightarrow (-x, iy)$ . Например, точка  $P(3; 5) \in E$  переходит в точку  $\phi(P) = (-3; 5i) \in E$ .

Используя перемешивающий эндоморфизм  $\phi$ , можно модифицировать преобразование Вейля, чтобы оно не было вырожденным при  $P = Q$ . Модифицированное преобразование Вейля  $\hat{e}_n(P, Q) : E[n] \times E[n] \rightarrow \mu_n$  определяется формулой

$$\hat{e}_n(P, Q) = e_n(P, \phi(Q)). \quad (5.6.23)$$

## 5.7 Приложения преобразований Вейля и Тейта

В статьях ([23], [24]) А. Джоукса приведены примеры использования преобразований Вейля и Тейта в криптографии. Рассмотрим в этом разделе эти приложения.

### 1. Протокол Диффи-Хеллмана для трех участников

Протокол Диффи-Хеллмана генерации общего секретного ключа для трех участников (Tripple Diffi–Hellman) был рассмотрен в предыдущей главе. Дадим его описание с использованием преобразований Вейля–Тейта.

1. Рассматривается эллиптическая кривая  $EC : y^2 = x^3 + ax + b(F_q)$  и точка  $P$  большого порядка  $n$ .

2. Каждый из участников  $A, B$  и  $C$  выбирает случайное число  $k_A, k_B$  и  $k_C$  на интервале  $[2; n - 1]$  и вычисляет точку  $k_AP, k_BP, k_CP$  соответственно, которую пересылает остальным участникам.

3. Теперь каждый участник вычисляет общий элемент конечного расширения поля  $F_{q^k}$ , где  $n|q^k - 1$  по формуле

$$k = \tau(P, P)^{k_A k_B k_C} = \tau(bP, cP)^{k_A} = \tau(aP, cP)^{k_B} = \tau(aP, bP)^{k_C}$$

Выигрышем применения преобразований Вейля–Тейта является уменьшение числа информационных обменов по сети (от 6 до 3).

## 2. Шифрование на основе идентификационных данных пользователей

Идея шифрования на основе идентификационных данных пользователей (Identity based encryption – IDE) была впервые выдвинута в 1984 году А.Шамиром. Она состоит в том, чтобы использовать в качестве открытого ключа пользователя не произвольные труднозапоминающиеся ключи, а естественные ключи, полученные из общеизвестных сведений о пользователе, например, его фамилии и инициалов, электронного адреса или другого известного другим пользователям идентификатора. В случае использования схемы IDE отпадает потребность в сложной системе лицензированных сертификационных центров и хранении базы данных открытых ключей на защищенном сервере.

До упомянутой статьи Джоукса было предложено несколько реализаций IDE. Например, в 2001 году на конференции Cryptography and Coding Кокс (C.Cocks) предложил схему [12], основанную на классической задаче определения, является ли заданной число квадратичным вычетом в конечном поле. Оно было слишком громоздким, т.к. для шифрования 1 бита информации требовалось два числа RSA.

Боне и Франклин in [8] предложили другое решение, основанное на суперсингулярных кривых и спариваниях. Дадим здесь описание идеи.

Пусть  $m$  – сообщение, которое требуется подписать, используя публичный идентификатор  $ID_A$  пользователя Alice, например, Alice@gmail.com. Первая проблема состоит в том, чтобы закодировать эту строку точкой на ЭК. Решение может быть таким, как описано в разделе "Криптографические протоколы" (с. 69).

### Формирование подписи

1. Сначала выбираются глобальные параметры системы: эллиптическая кривая ЭК, базовая т.  $P$  порядка  $n$  и глобальный секретный ключ  $s$ . По ним вычисляется открытая точка  $Q = sP$ .

2. Далее, открытому идентификатору  $Id_A$  сопоставляется точка  $P_A$ , имеющая также порядок  $n$ . Эта точка является открытым ключом  $A$ , а соответствующим закрытым ключом является точка  $Q_A = sP_A$ . Пользователю  $A$  не нужно знать значение  $s$ .

Для того, чтобы подписать сообщение  $m$  необходимо выполнить следующие действия:

1. Выбираем случайное число  $r$  из диапазона  $[2; n - 1]$ .
2. Формируем криптографическую подпись

$$sg(m) = \langle rP, m \oplus H(\tau(P_A, rQ)) \rangle,$$

где  $H$ —криптографическая хеш-функция.

## Проверка подписи

Для проверки подписи необходимо вычислить  $\tau(P_A, rQ)$ , используя следующие соотношения:

$$\tau(Q_A, rP) = \tau(P_A, rP)^s = \tau(P_A, rQ)$$

Если требуется, чтобы ключ пользователя периодически обновлялся, можно вместо постоянного адреса Alice@gmail.com кодировать конкатенацию строк Alice@gmail.com || Текущий\_Год.

## 3. Слепая подпись

Схема слепой подписи используется в тех случаях, когда подписывающее лицо не должно знать содержимое документа. Понятие слепой подписи было введено Дэвидом Чаумом в 1990 году в работе [11]. В этой же работе он предложит первую реализацию слепой подписи с использованием метода RSA:

Пусть  $n$ —число RSA,  $(e, d)$ —пара, состоящая из открытого и закрытого ключей подписывающего лица. Сообщение  $M$  кодируется числом  $m \in [2; n - 1]$ . Алгоритм получения слепой подписи состоит из следующих шагов:

1. Выбираем маскирующий множитель  $k$ , равным случайному числу из диапазона  $[2; n - 1]$ .
2. Маскируем сообщение  $m$ , домножая его на  $k$ :  $m' = k^e \cdot m \bmod n$ .
3. Передаем  $m'$  на подпись:

$$s(m') = (m')^d \bmod n = (mk^e)^d \bmod n = km^d \bmod n$$

4. Снимаем маскирующий множитель

$$s(m) = s(m')/k.$$

Опишем теперь этот же алгоритм, используя билинейные спаривания.

## Слепая подпись на эллиптических кривых

Пусть даны: эллиптическая кривая ЭК, базовая т.  $P$  порядка  $n$  на ЭК, секретный ключ  $s$  и открытый ключ  $Q = sP$  подписывающего лица, точка ЭК  $Q_m$ , кодирующая сообщение  $m$ . Построение подписи выполняется следующим образом:

1. Выбираем маскирующий множитель  $k$ , равным случайному числу из диапазона  $[2; n - 1]$  и вычисляем  $kP$ .
2. Вычисляем точку  $R = Q_m + kP$  и передаем ее на подпись.
3. Подписывающее лицо ставит подпись

$$s(R) = s \cdot R = s \cdot (Q_m + kP) = sQ_m + skP = s(Q_m) + kQ$$

4. Снимаем маскирующий множитель с подписи

$$s(Q_m) = s(R) - kQ$$

В работе Александры Болдыревой [7] приведены другие примеры построения подписей (мультиподписей, коротких подписей), основанных на трудноразрешимости *вычислительной проблемы Диффи-Хеллмана-ВПДХ*. Напомним, что ВПДХ – это проблема вычисления в конечной группе  $\langle G, g \rangle$  с порождающей  $g$  по заданным элементам  $g^a$ ,  $g^b$  элемента  $g^{ab}$ .





# Литература

- [1] Agrawal M. *PRIMES is in P* / M.Agrawal, N.Kayal, N.Saxena.– Annals of Mathematics.– 2004, v.160, p. 781–793.
- [2] Atkin A. *Prime sieves using binary quadratic forms*/ A. Atkin, D. Bernstein.– <http://cr.yp.to/papers/primesieves-19990826.pdf>
- [3] Bernstein D. *ECM using Edwards curves*/ D. Bernstein, P. Birkner, T.Lange, C. Peters.–2008, p.1–40 <http://eecm.cr.yp.to/eecm-20100616.pdf>
- [4] Bernstein D. *Faster addition and doubling on elliptic curves.*/ D. Bernstein, T.Lange. in AsiaCrypt'2007, p.29–50
- [5] Bernstein D. *Explicit-formulas Database.*/ D. Bernstein, T.Lange. 2007 <http://hyperelliptic.org/EFD>
- [6] Bernstein D. *Starfish on Strike*/ D. Bernstein, P. Birkner, T.Lange, C. Peters.– LATINCRYPT 2010, edited by Michel Abdalla and Paulo S. L. M. Barreto. Lecture Notes in Computer Science 6212. Springer, 2010, p.61–80
- [7] Boldyreva A. *Efficient Threshold Signature, Multisignature and Blind Signature Schemes based on Diffie–Hellman–Group Signature Scheme.* Crypto'2003, Lect.Not.Comp.Sci., p.31–46
- [8] Boneh D., Franklin M. *Identity based encryption from the Weil pairing.* In J.Killan, editor, Proceeding of Crypto'2001, volume 2139, Lect.Notes in Comp.Sci., 2001, p.213–229
- [9] Brent R.P. *Some integer factorization algorithms using elliptic curves*/ R.P. Brent.– Austral.Comput.Sci.Comm, 1986, v.8, p. 149–163.
- [10] Buhler J.P. *Factoring integers with the number field sieve* / J. P. Buhler, H. W. Lenstra, C. Pomerance.– in The Developement of the Number Field Sieve, Springer–Verlag, Berlin, Germany, 1993, p. 50–94.

- [11] Chaum D. *Zero-knowledge undeniable signatures*. In I.Damgard, editor, Advances in Cryptology–Crypto'90, Lect.Not.Comp.Sci., v.740, 1992, p.89-105
- [12] Cocks C. *An identity based encryption scheme based on quadratic residues*. Cryptography and Coding, 2001.
- [13] Cohen H. *A course in computational algebraic number theory* / H. Cohen.– Springer–Verlag, Berlin, 1993, 545 p.
- [14] Crandall R. *The prime numbers: a computational perspective* / R. Crandall, C. Pomerance.– sec.ed. Springer–Verlag, Berlin, 2005, 604 p.
- [15] Dunham W. *Euler : The Master of Us All*. Mathematical Association of America, 1999, 185 p.
- [16] Edwards H.M. *A normal form for elliptic curves*. / H.M. Edwards.–Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), p. 393-422
- [17] Elkenbracht-Huising M. *An implementation of the Number Field Sieve* / M. Elkenbracht-Huising.– Experimental Mathematics, 1996, v.5, p. 231—253.
- [18] Gardner M. *A new kind of cipher that would take millions years to break* / M. Gardner.– Sci. Amer. 1977, p. 120–124.
- [19] Golomb S.W *Shift register sequences* San Francisco, Holden-Day — 1967 — 115 p.
- [20] Granville A. *Smooth numbers: Computational number theory and beyond* / A. Granville.– Proc. of MSRI workshop, 2004, 268–363
- [21] Hackmann P. *Elementary Number Theory* / P. Hackmann.– HHH Publ, 2007, 411 p.
- [22] Jaeschke G. *On Strong Pseudoprimes to Several Bases* / G/ Jaeschke. - Mathematics of Computation, v.61, 1993, p.915-926
- [23] Joux A. *A one round protocol for tripartite Diffie-Hellman*. / A. Joux.– Algorithmic Number Theory: 4-th International Symposium, ANT–IV, Lecture Notes in Computer Science, v.1838(2000), Springer–Verlag, p. 385–393.
- [24] Joux A. *The Weil and Tate Pairings as Building Blocks for Public Key Cryptosystems*. Proceedings of the 5th International Symposium on Algorithmic Number Theory, Springer-Verlag London, 2002, p.20–32

- [25] Lenstra H.W. *Factoring integers with elliptic curves* / H.W. Lenstra.– Ann.Math. v.126 (1987), p. 649–674.
- [26] Lenstra A. *The Development of the Number Field Sieve* / A. Lenstra and H. Lenstra (eds.).– Lect.Not.in Math.**1554**, Springer–Verlag, Berlin, 1993, 139 p.
- [27] Longa P. *Fast Point Arithmetic for Elliptic Curve Cryptography*/ P. Longa.– Presentation at CliCC, University of Ottawa, Ottawa, Canada, 2006.
- [28] Longa P. *ECC Point Arithmetic Formulae (EPAF): Jacobian coordinates*/ P. Longa, C. Gebotus. In Proc. Workshop on Cryptographic Hardware and Embedded Systems (CHES 2010), 2010.
- [29] Menezes A. *Reducing Elliptic Curve Logarithms to a Finite Field* / A. Menezes, T. Okamoto, S. Vanstone.– IEEE Trans. Info. Theory, v.39, 1993, p. 1639–1646.
- [30] Menezes A. *Elliptic Curve Public Key Cryptosystems* / A. Menezes.– 1993, 144 p.
- [31] Montgomery P.L. *Speeding the Pollard and Elliptic Curve Methods of Factorization*./P.L. Montgomery.– Mathematics of Computation, v.48, iss.177, 1987, p.234–264.
- [32] Montgomery P.L. *An FFT-extension of the Elliptic Curve Method of Factirization* / P.L. Montgomery.– Doctoral Dissertation, 1992, Univ.Calif. USA, 118 p.
- [33] Pollard J.M. *Theorems on factorization and primality testing* / J.M. Pollard. – Proc.Cambridge Phil.Society. 1974, v.76, p. 521-578.
- [34] Pomerance C. *Smooth Numbers and the Quadratic Sieve* / C. Pomerance. – MSRI publications, **v.44** – 2008, p. 69–82.
- [35] Shoup V. *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*/ V. Shoup. – Cambridge University Press, Sec.Edition, 2005, 600 p. <http://shoup.net/ntb/>
- [36] SciLab *Free open source software for numerical computation* /<http://www.scilab.org>
- [37] Sheng Lin, Yong-Bin Kim, Lombardi F. CNTFET-Based Design of Ternary Logic Gates and Arithmetic Circuits //IEEE Transactions on Nanotechnology, March. 2011, vol.10, № 2, C. 217-225

- [38] Venturi D. *Lecture Notes on Algorithmic Number Theory.*/ D. Venturi. – Springer-Verlag, New-York, Berlin, 2009, 217 p.
- [39] Washington L. *Elliptic Curves Number Theory and Cryptography* /L. Washington. – Series Discrete Mathematics and Its Applications, Chapman & Hall/CRC, second ed. 2008, 524 p.
- [40] Аграновский А.В. *Практическая криптография: алгоритмы и их программирование* / А.В. Аграновский, Р.А. Хади.– М.: Солон-Пресс, 2009, 256 с.
- [41] Айерленд К. *Классическое введение в современную теорию чисел.* / К. Айерленд, М. Роузен. – М.: Мир, 1987, 428 с.
- [42] Акритас А. *Основы компьютерной алгебры и приложениями.* / А. Акритас. – М.: Мир, 1994, 544 с.
- [43] *Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп*/ Под редакцией М.А. Арбиба — М.: Статистика — 1975 — 334 с.
- [44] Беллман Р. *Введение в теорию матриц*/Р.Беллман — М.: Наука, — 1969. — 367 с.
- [45] Берленкэмп Э. *Алгебраическая теория кодирования.* /Э.Берленкэмп. — М.: Мир, — 1971. — 478 с.
- [46] Богопольский О.В. *Алгоритмическая теория чисел и элементы криптографии.* / О.В. Богопольский.– Спецкурс для студентов НГУ, Новосибирск, 2005, 35 с. / <http://math.nsc.ru/bogopolski/Articles/SpezkNumber.pdf>
- [47] Болотов А.А. *Элементарное введение в эллиптическую криптографию: протоколы криптографии на эллиптических кривых.* / А.А. Болотов, С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. – М.:КомКнига, 2004, 280 с.
- [48] Болотов А.А. *Алгоритмические основы эллиптической криптографии.* / А.А. Болотов, С.Б. Гашков, А.Б. Фролов, Часовских А.А.. – М.:РГСУ, 2004, 499 с.
- [49] Боревиц З.И. *Теория чисел.* / З.И. Боревиц, И.Р. Шафаревич. – 3-е издание, М.: Наука, 1985, 504 с.
- [50] Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра.*/ Б.Л.ван дер Варден. – изд.2, М.: Наука, 1979, 623 с.
- [51] Василенко О.Н. *Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии*/ О.Н. Василенко. – МЦНМО, 2003, 326 с.

- [52] Вельщценбах М. *Криптография на C и C++ в действии: учебное пособие* / М. Вельщценбах. – М.: Триумф, 2008, 464 с.
- [53] Гатмахер Ф.Р. *Теория матриц.*/ Ф.Р. Гатмахер – М.: Наука. – 1967. – 575 с.
- [54] Гилл А *Линейные последовательностные машины*/А. Гилл — М.:Наука — 1974 — 287 с.
- [55] Ермаков С.М. *Курс статистического моделирования*/С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов — М.:Наука — 1976 — 318 с.
- [56] Захаров В.М. *Вычисления в конечных полях: уч.-метод. пособие* / В.М. Захаров, Б.Ф. Эминов. – Казань: КГТУ им. А.Н.Туполева, 2010, 132 с.
- [57] Ишмухаметов Ш.Т. *Методы факторизации натуральных чисел*/ Ш.Т.Ишмухаметов. – Казань, 2012, 189 с.
- [58] Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ. т.2 Получисленные алгоритмы*/Д. Кнут — М.:Мир — 1977 — 724 с.
- [59] Коблиц Н. *Курс теории чисел и криптографии* / Н. Коблиц. – М.: ТВП, 2001, 260 с.
- [60] Корешков Н.А. *Теория чисел.*/Н.А. Корешков. – Уч.-мет. пособие, Казань, КФУ, 2010, 35 с.
- [61] Кормен Т. *Алгоритмы: построение и анализ* /Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 1999.
- [62] Крамер Г. *Математические методы статистики* /Г. Крамер — М.:Мир — 1975 — 648 с.
- [63] Кузнецов В.М. *Марковская модель цифрового стохастического генератора*/В.М. Кузнецов, В.М. Песошин, Е.Л. Столов — Автоматика и Телемеханика — 2008 – № 9, с. 62-68
- [64] Кузнецов В.М. *Марковская модель цифрового стохастического генератора*/В.М. Кузнецов, В.М. Песошин, Е.Л. Столов *Стабильные состояния асинхронного генератора.* – Ученые записки казанского государственного университета, –2010 – Том. 152, Книга 1. Серия - Физико-математические науки, с.174-180
- [65] Кунегин С.В. *Системы передачи информации.* С.В. Кунегин.- Курс лекций. М., в/ч 33965, 1997, 317 с. [http://kunegin.com/ref/sod\\_lec.htm](http://kunegin.com/ref/sod_lec.htm)

- [66] Лазарева С.В. *Математические основы криптологии: тесты простоты и факторизация.* / С.В. Лазарева, А.А. Овчинников. Учебное пособие, Санкт-Петербург, СПбГУАП, 2006, 65 с.
- [67] Латыпов Р.Х. *Периодические последовательности, порождаемые регистр сдвига с нелинейными обратными связями*/ Р.Х. Латыпов. Изв. Вузов. Математика, №5, 1989, С.5-13
- [68] Лидл Р. *Конечные поля*/Р. Лидл, Г. Нидеррайтер.– Т. 1, 2. М.: Мир, 1988, 428 с.
- [69] Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А. *Теория кодов, исправляющих ошибки.*– Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж.А. Слоэн.– М. - Связь, 1979, 372 с.
- [70] Максимов В.М. *О сходимости неоднородных дважды стохастических цепей Маркова*/В.М. Максимов —ТВП, т.15, вып. 4 — 1970 — с.622-636
- [71] Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*/М. Маркус , Х. Минк – М.: Наука, – 1972. – 232 с.
- [72] Молдовян Н.А. *Криптография. От примитивов к синтезу алгоритмов* / Н.А.Молдовян, А.А. Молдовян, М.А. Еремеев. – БХВ-Петербург, 2004, 446 с.
- [73] Морелос-Сарагоса Р. *Искусство помехоустойчивого кодирования - методы, алгоритмы, применение.*/ Р. Морелос-Сарагоса.– Москва, Техносфера, 2006, 312 с.
- [74] Нестеренко Ю.В. *Теория чисел*/ Ю.В. Нестеренко. – Москва, Изд.Центр Академия, 2008, 273 с.
- [75] Отнес Р. *Прикладной анализ временных рядов* /Р. Отнес, Л. Эноксон — М.:Мир — 1982 — 428 с.
- [76] Песошин В.А. *Цифровые генераторы случайных сигналов для защиты информационных средств телекоммуникации* /В.А Песошин, В.М. Кузнецов, Н.Н. Сергеев. – Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. Вып.4 —1993 — с.95-113.
- [77] Песошин В.А. *Генераторы псевдослучайных и случайных чисел на регистрах сдвига* /В.А. Песошин, В.М. Кузнецов — Казань: КГТУ им. А.Н.Туполева — 2007 – 296 с.

- [78] А.Г. Ростовцев, Е.Б. Маховенко. Теоретическая криптография, Профессионал, Санкт-Петербург, 2005, 479 с.
- [79] Сизый С.В. *Лекции по теории чисел: учебное пособие для математических специальностей* / С.В. Сизый.– Екатеринбург, УрГУ, 1999, 136 с.
- [80] Столов Е.Л. *Методы компактного тестирования цифровых устройств* / Е.Л. Столов — Казань: Казанский государственный университет — 1993—115 с.
- [81] Столов Е.Л. *Генератор случайных чисел составленный из нелинейных асинхронных элементов*/ Е.Л. Столов. Исследования по прикладной математике, вып. 26, Институт информатики КГУ — Казань, — 2006 – с.101-106.
- [82] Столов Е.Л. *Математическая модель генератора случайных чисел на основе трехзначной логики*/Е.Л. Столов – Прикладная дискретная математика – 2012 – № 2, с 43-49
- [83] Хинчин А.Я. *Работы по математической теории массового обслуживания*./А.Я. Хинчин – М.: Фзматгиз. – 1963. - 235 с.
- [84] Чандрасекхаран К. *Введение в аналитическую теорию чисел*/ К. Чандрасекхаран.–М.– Мир, 1974, 187 с.
- [85] Черемушкин А.В. *Лекции по арифметическим функциям в криптографии* / А.В. Черемушкин.– М.: МЦНМО, 2002, 103 с.
- [86] ) Шаньгин Ф.Ф. *Защита компьютерной информации: эффективные методы и средства* /Ф.Ф. Шаньгин.– М.:ДМК, 2008, 542 с.
- [87] ) Шеннон К. *Работы по теории информации и кибернетике*./К. Шеннон.– М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. — 830 с.